

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy

POUR OBTENIR

le Grade de Docteur ès-Sciences Mathématiques

par

GEORGES GLAESER

1^{re} THÈSE — ÉTUDE de QUELQUES ALGÈBRES TAYLORIENNES

2^{me} THÈSE — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 20 Mai 1957, devant la Commission d'Examen

Président MM. GAUTHIER

Examineurs }
HERVÉ
BRUHAT
SCHWARTZ

Digitized by the Internet Archive
in 2026

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy

POUR OBTENIR

le Grade de Docteur ès-Sciences Mathématiques

par

GEORGES GLAESER

1^{re} THÈSE — ÉTUDE de QUELQUES ALGÈBRES TAYLORIENNES

2^{me} THÈSE — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 20 Mai 1957, devant la Commission d'Examen



Président	MM. GAUTHIER
Examineurs }	HERVÉ
	BRUHAT
	SCHWARTZ

UNIVERSITÉ DE NANCY - FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen : M. URION

Assesseur : M. ECHEVIN

Doyens Honoraires : MM. HUSSON, CORNUBERT, DELSARTE

Professeurs honoraires : MM. DARMOIS E, GUTTON, CROZE, DARMOIS G., RAYBAUD, FALLOT, LAFITTE, LERAY, HUSSON, DONZELOT. JOLY, LAPORTE, EICHHORN, CAPELLE, GODEMENT, DUBREIL, SCHWARTZ, DIEUDONNE, de MALLEMANN, LONGCHAMBON.

Maîtres de Conférences Honoraires : MM. RAUX, LIENDHART.

PROFESSEURS

MM.		MM.	
LONGCHAMBON	... Minéralogie	ECHEVIN	 Botanique
CORNUBERT	 Chimie organique	WAHL	 Chimie org. industrielle
CHEVALLIER	 Physique	BARRIOL	 Chimie théorique
URION	 Chimie biologique	OLMER	 Physique appliquée
DELSARTE	 Analyse supérieure	BIZETTE	 Physique
REMY	 Zoologie	GUILLIEN	 Electronique
ROUBAULT	 Géologie	GIBERT	 Génie chimique
LETORD	 Chimie minérale	HERVE	 Calcul diff. et intégral
GUERIN	 Chimie industrielle	LEGRAS	 Mécanique rationnelle
DODE	 Chimie phys. et électroch.	CHAPELLE	 Physique
VEILLET	 Biologie animale	DAVID	 Chimie biologique
GAUTHIER	 Mathématiques appliquées		

MAITRES DE CONFERENCES

MM.		MM.	
WERNER	 Botanique	NICLAUSE	 Génie chimique
AUBRY	 Chimie	GARNIER	 Agronomie
BOLFA	 Minéralogie	BRUHAT	 Mathématiques générales
BESSON	 Chimie minérale	COPPENS	 Radiogéologie
FAIVRE	 Physique à l'état mét.	DUVAL	 Chimie
FRUHLING	 Radiotechnique	SADRAN	 Cécchimie
GAYET	 Physiologie	CHAPON	 Chimie biologique
COMOLET	 Mécanique physique	HADNI	 Physique
MANGENOT	 Phytopathologie	Mme ROIZEN	 Physique
LIONS	 M.M.P.	HILLY	 Géologie de la Lorraine

Secrétaire : M. LAPOINTE

ERRATA

Page	Ligne	Au lieu de	Lire
22	Titre de paragraphe	D (K, B)	D^m (K, B)
25	19	(§ 7)	(§ 8)
31	Formule (13.3)	K	K
		d_m	d_M
58	13	l'arc $\widehat{MN}$	l'arc $\widehat{AM}$
86	20	W^1 (F)	W^m (F)
111	19	homéomorphisme	homomorphisme
79	ajouter avant le corollaire :		
	<i>Remarque</i> : Soit DA une dérivation sur A relative au caractère A . L'application ${}^t p$ l'envoie sur une dérivation sur S , relative au caractère ${}^t p$ (A). (Vérification immédiate).		
80	18	Supprimer 10 lignes depuis	
	c)	Soit $A \dots$ jusqu'à... En particulier.	
80	3 du bas	Ajouter cf Remarque ci-dessus. p. 79.	

ÉTUDE DE QUELQUES ALGÈBRES TAYLORIENNES

Par

Georges Glaeser

à Nancy (France)

*A la mémoire de mon père
fusillé le 29 juin 1944*

TABLE DES MATIÈRES

	page
Introduction	2
Chapitre I. Notions de Calcul taylorien	
1. Module de continuité	7
2. Module de continuité d'une fonction	8
3. Produit tensoriel symétrique	9
4. Polynômes à valeurs vectorielles	10
5. Calcul des coefficients d'un polynôme	11
6. Fonctions m -fois continûment dérivables	13
7. Une notation abrégée	17
8. Caractérisation des fonctions m -fois continûment dérivables	18
9. La formule de Leibniz	20
10. Normes et majorations	22
11. Champs W -tayloriens	24
12. Le théorème de prolongement	27
13. Majoration du prolongement	30
14. Calcul d'un m -module de continuité du prolongement	31
15. Deux méthodes pour construire des champs W -tayloriens d'ordre m	33
Chapitre II. Questions de géométrie infinitésimale directe	
1. Généralités	37
2. Champs de gerbes de droites	38
3. Champs d'éléments de contact	39
4. Agrandissement d'un champ d'éléments de contact	41
5. Le paratingent linéarisé d'ordre 1	43
6. Paratingent et paratingent linéarisé d'ordre 1	45

7. Le paratingent linéarisé d'ordre m	55
8. Notions sur les ensembles critiques	57
9. Ensembles connexes par arcs rectifiables	61
Chapitre III. Les algèbres de Whitney	
1. Les distributions fondamentales	62
2. Algèbres de Whitney	64
3. Application à la théorie des distributions	67
4. Ensembles de type C_m	68
5. Algèbres de Whitney semi-simples	72
6. Supplémentaires topologiques	77
7. Algèbres locales de dimensions finies	82
8. Algèbres wedderburniennes	85
Chapitre IV. Les algèbres $L_\alpha^m(K)$ et $Z_\alpha^m(K)$	91
Chapitre V. Algèbres tayloriennes	
1. Espaces fibrés tayloriens	98
2. Quelques exemples d'algèbres tayloriennes	100
3. L'ultraspectre	105
4. Application aux algèbres de Silov	115
5. Compacité forte du spectre	118

Introduction

Le mémoire fondamental de M. Gelfand "Normierte Ringe" (1941) se proposait de représenter les éléments d'une algèbre normée par des fonctions continues, définies sur un ensemble compact, appelé spectre.

Les conditions de possibilité d'une telle représentation ont été complètement élucidées.

Par contre, l'étude des algèbres liées à des classes plus restreintes de fonctions (fonctions dérivables, m -fois continûment dérivables, analytiques, etc.), pose encore de nombreux problèmes.

Notre travail est consacré aux algèbres de Banach, commutatives, possédant une unité e , et dont les éléments se laissent décrire en termes de fonctions m -fois continûment dérivables. Le trait distinctif de ces algèbres est la possibilité d'assigner à chaque élément, et en chaque point du spectre un "développement de Taylor".

L'algèbre $\mathfrak{D}^m(K)$, constituée par toutes les fonctions m -fois continûment dérivables définies sur un pavé compact K de R^n est assez bien connue. Mais la structure de ses sous-algèbres, de ses idéaux, et de ses quotients, n'a pas encore fait l'objet d'investigations suffisantes: Un premier pas, d'ailleurs décisif, dans cette voie est constitué par les travaux de M. Whitney.

Les trois premiers chapitres du présent mémoire s'occupent de certains quotients de $\mathfrak{D}^m(K)$: à savoir les quotients par les idéaux $J^m(F)$ formés par toutes les fonctions qui s'annulent ainsi que toutes les dérivées partielles d'ordre total m , sur un ensemble compact $F \subset K$. Nous appellerons "Algèbres de Whitney" ces quotients $W^m(F) \cong \mathfrak{D}^m(K) / J^m(F)$.

Le quatrième chapitre est consacré à un autre exemple: l'Algèbre des fonctions m -fois continûment dérivables sur K , dont les dérivées partielles m -ème sont lipschitziennes lorsqu'on munit K d'une certaine métrique.

Enfin le dernier chapitre est un essai de théorie générale des algèbres tayloriennes. Cette théorie généralise les travaux de M. Silov sur les "sommations continues d'algèbres de dimension finie" (cf. Silov [3]).

Dans l'étude des algèbres de Whitney, et des algèbres tayloriennes, on se heurte dès le début à deux sortes de difficultés techniques, relevant respectivement de l'algèbre et de la géométrie.

^{1°)} Les calculs qui se présentent sont essentiellement des manipulations de formules de Taylor. Il est d'expérience courante, que l'écriture d'une formule de Taylor d'ordre quelque peu élevé, devient fastidieuse, dès que le nombre des variables est supérieur à 1. Nous avons été conduit à utiliser un algorithme condensé de type tensoriel. Le Chapitre I est consacré à cet exposé du "calcul taylorien". On y trouvera, outre un formulaire qui ne vise pas à l'originalité, quelques résultats nouveaux. Par exemple, la Proposition III donne une caractérisation très utile des fonctions m -fois continûment dérivables. Cette caractérisation ne nécessite pas un examen récurrent des dérivabilités d'ordre $m - k$ ($1 \leq k < m$).

Nous reprenons l'essentiel de la démonstration du théorème du prolongement de M. Whitney ([1]). Mais grâce à la notion de m -module de continuité, utilisée dès le début du chapitre, nous sommes en mesure de perfectionner la démonstration, et de compléter le résultat.

La définition même de ce que M. Whitney appelait une "fonction

m -fois continûment dérivable définie sur F ", et que nous proposons d'appeler un "Champ W -taylorien" est assouplie (Proposition VI). De plus, nous obtenons des majorations pour les prolongements des champs W -tayloriens qui sont indépendantes des propriétés géométriques des ensembles F .

Enfin, le Chapitre I se termine par l'exposé de deux procédés permettant de construire des fonctions m -fois continûment dérivables non triviales, à partir de certaines fonctions qui ne sont que $m - k$ fois continûment dérivables ($1 \leq k < m$) (Propositions VIII et IX).

2°) Il existe une dualité remarquable, entre les propriétés de $W^m(F)$ et les propriétés infinitésimales de l'ensemble F . Ces propriétés relèvent de la Géométrie Infinitésimale Directe de M. Bouligand. Dans les travaux de M. Bouligand, et de ses élèves il s'agissait surtout des propriétés invariantes par le groupe des homéomorphismes 1-fois dérivables de K . Or notre travail est lié au groupe des homéomorphismes m -fois continûment dérivables: Le paratingent et le contingent (cf. Bouligand ([1]) et Choquet ([1], [2], [3])) se révèlent insuffisants pour notre objet. Nous introduisons une notion nouvelle: le paratingent linéarisé d'ordre m (en abrégé ptgl^m). L'étude du ptgl^m occupe la majeure partie du Chapitre II. En particulier nous avons tenu à dégager les relations qui existent entre le ptg de M. Bouligand, et notre ptgl^1 . On obtient le ptgl^1 , en itérant à partir du ptg , 2^n fois de suite au plus (Proposition VII) une opération géométrique simple. Nous construisons aussi un exemple pathologique qui montre bien que le ptg est insuffisant pour notre objet: (Exemple V).

Nous donnons ensuite quelques résultats sur les ensembles critiques. Ce sont des ensembles de R^n sur lesquels une fonction non constante peut avoir toutes ses dérivées partielles du premier ordre nulles. M. Whitney, avait déjà construit un exemple assez compliqué de courbe critique ([5]). On montre que la courbe de von Koch, constitue un exemple tout à fait élémentaire de ce phénomène. Le chapitre s'achève avec quelques considérations sur les ensembles connexes par arcs rectifiables.

Grâce à ces deux chapitres de caractère préliminaire, nous abordons l'étude des algèbres de Whitney. Nous indiquons d'abord une norme sur ces algèbres, équivalente à la norme quotient, mais qui ne nécessite pour être calculée que la connaissance des éléments de $W^m(F)$ sur F , sans passer par leurs prolongements. La connaissance de cette norme permet d'améliorer

quelques propositions de la théorie des distributions de M. Schwartz.

Puis nous passons à l'étude de la semi-simplicité de $W^m(F)$, qui se traduit par une propriété du ptgl^1 de F . Les Propositions VIII et IX du Chapitre I permettent alors de construire des exemples non triviaux d'algèbres $W^m(F)$ possédant un radical.

Contrairement à la plupart des auteurs qui se sont occupés d'algèbres normées, nous n'avons pas centré nos réflexions sur le seul cas des algèbres semi-simples : par exemple nous caractérisons (en utilisant le ptgl^1 et le ptgl^m) les algèbres $W^m(F)$ qui sont sommes directes topologiques d'une sous-algèbre, et de leur radical.

Nous abordons également d'autres problèmes relatifs à la décomposition de $\mathfrak{D}^m(K)$ en un idéal et une sous-algèbre ; il s'ensuit qu'une algèbre $W^m(F)$ ne peut être isomorphe à une sous-algèbre de $\mathfrak{D}^m(K)$, si $F \neq K$.

Enfin, nous étudions les algèbres $W^m(K)$ (dites de type C_m), pour lesquelles la topologie est identique à la topologie de la convergence uniforme des dérivées partielles jusqu'à l'ordre m .

Dans tout ce mémoire, l'emploi des modules de continuité se révèle un outil technique précieux : le Chapitre IV est consacré à l'étude de certaines algèbres associées à un module de continuité α . Il s'agit de l'algèbre $I_\alpha^m(K)$ (resp. $Z_\alpha^m(K)$) qui est formée des fonctions $\in \mathfrak{D}^m(K)$, qui admettent un m -module de continuité multiple scalaire de α (resp. négligeable devant α). On démontre en particulier que $\mathfrak{D}^m(K)$, est limite inductive (au sens large) des $Z_\alpha^m(K)$; et que $L_\alpha^m(K)$ est le bidual de $Z_\alpha^m(K)$.

Le dernier chapitre étudie, du point de vue axiomatique, la possibilité d'assigner à chaque élément d'une algèbre $\mathfrak{A}$ un "développement de Taylor". On y parvient en construisant certains espaces fibrés particuliers : les espaces fibrés tayloriens. (En abrégé EFT).

Nous énonçons alors quatre axiomes qui assurent que l'algèbre $\mathfrak{A}$ peut être interprétée comme une algèbre de sections continues d'un EFT, que l'on peut déduire intrinsèquement de $\mathfrak{A}$. La base de l'EFT, n'est pas (contrairement au point de vue de M. Silov), le spectre de l'algèbre, mais un espace localement compact que nous appelons l'ultraspectre,

Ayant construit pour tout élément de $\mathfrak{A}$, et tout point de l'ultraspectre un "polynôme de Taylor", on peut se demander s'il est possible d'interpréter les coefficients de ce polynôme, comme des dérivées, au sens classique. Cela

n'est pas vrai en général: on démontre cependant le théorème suivant. "Si le spectre d'une algèbre taylorienne est compact pour la topologie induite par le dual fort de $\mathfrak{A}$, alors les premiers coefficients des "développements de Taylor" d'un élément peuvent s'interpréter comme des dérivées premières ordinaires (cf. Théorème III).

Le Chapitre V contient aussi un recueil varié d'exemples d'algèbres normées, illustrant les diverses particularités rencontrées au cours de notre étude.

Je suis heureux de remercier ici tous ceux qui ont porté un intérêt bienveillant à mes travaux :

M. M. Dieudonné, Delsarte, Choquet et Hervé, dont les encouragements m'ont été précieux.

M. Bruhat auquel j'exprime toute ma gratitude pour l'aide constante qu'il m'a prodiguée sans ménager sa peine.

M. Laurent Schwartz auquel je dois l'orientation de mes préoccupations mathématiques, et dont les conseils avisés m'ont été d'un si grand secours : qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie également M. Gauthier qui ma fait l'honneur de présider le Jury auquel cette thèse est soumise.

CHAPITRE I

NOTIONS DE CALCUL TAYLORIEN

Une des principales difficultés que comporte l'étude des fonctions m -fois continûment dérivables, réside dans la complication de l'algorithme des formules de Taylor pour plusieurs variables. Certes M. Whitney a considérablement simplifié cette technique, en utilisant une écriture symbolique "à une variable" (cf. Whitney [3] et L. Schwartz [1] p. 14). Il utilise les multi-indices $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ pour indexer les diverses dérivées partielles, et il écrit $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. De même $k! = k_1! k_2! \dots k_n!$.

Mais cette écriture a tous les inconvénients de l'introduction arbitraire d'un système de coordonnées. Les dérivées partielles n'ont pas de signification intrinsèque.

Nous utilisons systématiquement dans ce travail des notations vectorielles et tensorielles que nous allons maintenant exposer. Mais auparavant nous allons dire quelques mots de deux notions auxiliaires que nous utiliserons

constamment dans la suite: le module de continuité et les produits tensoriels symétriques.

Grâce à ces notions nous pourrions définir et étudier les "polynômes à n variables, du m -ième degré à valeurs dans un espace de Banach", puis les fonctions m fois continûment dérivables définies sur un pavé compact K de R^n .

Enfin nous rappellerons la démonstration du théorème du prolongement de M. Whitney, que nous perfectionnons sur plusieurs points (cf. Prop. VI et formules (13,1) (13,2) et (14,4)).

1. Module de Continuité.

Définition. Une fonction numérique $\alpha(x)$ définie sur un intervalle $[0, d]$ (où $d > 0$), de la droite R sera appelée un module de continuité si elle est continue, nulle pour $x=0$, croissante et concave.⁽¹⁾

Voici quelques conséquences immédiates de cette définition:

(1.1) — Si α s'annule en un point distinct de 0, α s'annule identiquement.

(1.2) — On obtient un prolongement de α défini sur la demi-droite $[0, \infty]$ en posant $\hat{\alpha}(x) = \alpha(d)$ pour $x \geq d$. $\hat{\alpha}$ satisfait alors aux conditions de la définition.

(1.3) — $\hat{\alpha}$ est sous-additive; en effet la concavité entraîne

$$\frac{\hat{\alpha}(x+a) - \hat{\alpha}(x)}{a} \leq \frac{\hat{\alpha}(a) - \hat{\alpha}(0)}{a}. \quad \text{D'où } \hat{\alpha}(x+a) \leq \hat{\alpha}(x) + \hat{\alpha}(a).$$

(1.4) — Etant donné un module de continuité α , non nul, il existe toujours un module de continuité β , tel que α soit négligeable (C'est à dire infiniment petit) devant β pour $x \rightarrow 0$ (Il suffit de prendre $\beta = \sqrt{\alpha}$).

(1.5) — La fonction x , est un module de continuité. Tout module de continuité, négligeable devant x (pour $x \rightarrow 0$) est identiquement nul.

(1.6) — Si α n'est pas nul la fonction $\hat{x}/\hat{\alpha}(x)$ est croissante (car $\frac{\hat{\alpha}(x) - \hat{\alpha}(0)}{x - 0}$ est décroissante) et bornée.

$$(1.7) \quad \begin{cases} \hat{\alpha}(\lambda x) \leq \lambda \cdot \hat{\alpha}(x) & \text{si } \lambda \geq 1 \\ \hat{\alpha}(\lambda x) \geq \lambda \cdot \hat{\alpha}(x) & \text{si } 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \quad \text{à cause de la concavité.}$$

1. La "concavité" d'une fonction implique la continuité de la fonction, en tout point intérieur de l'intervalle de définition (cf. B. Fonct. Var. réelle p. 46). Elle n'implique pas la continuité au point $x=0$.

2. Module de continuité d'une fonction.

Lemme 1. Pour toute famille $\mathfrak{F}$ bornée, uniformément équicontinue de fonctions définies sur un espace métrique de diamètre d ,⁽²⁾ à valeurs dans un espace normé, il existe un module de continuité α , tel que

$$\|f(M) - f(N)\| \leq \alpha(\|MN\|)$$

pour tout $f \in \mathfrak{F}$ ($\|MN\|$ = distance de M à N).

Posons en effet $\lambda(x) = \sup \|f(M) - f(N)\|$ pour $f \in \mathfrak{F}$, et $\|MN\| \leq x$.

La fonction λ est bornée, continue en 0 (en vertu de l'uniforme équicontinuité) croissante, et nulle pour $x = 0$. Dans le plan R^2 l'enveloppe convexe fermée de la réunion du graphe de λ et du segment $[0, d]$ de l'axe Ox , permet de définir la fonction α cherchée. (Vérification immédiate.)

Lemme 2. Soit α_n une suite de modules de continuité convergent uniformément vers 0 sur $[0, d]$, il existe un module de continuité α tel que $\alpha(x) \geq \alpha_n(x)$.

En effet, cette suite est bornée et uniformément équicontinue d'après le théorème d'Ascoli. Il existe donc un module de continuité α tel que $\alpha(x) \geq \alpha_n(x) - \alpha_n(0)$ d'après le Lemme 1.

Définition. Etant donnée une fonction uniformément continue définie sur un espace métrique, de diamètre borné par d , et à valeurs dans un espace normé, on dira qu' α est un module de continuité pour la fonction f , si $\|f(M) - f(N)\| \leq \alpha(\|MN\|)$.

Remarques — 1) Cette définition s'écarte de l'usage courant sur deux points (cf. de la Vallée-Poussin [1]). D'une part, nous exigeons qu' α soit concave. D'autre part, une fonction f possède, dans notre terminologie une infinité de modules de continuité. Néanmoins, il est possible de définir, pour une fonction f donnée un plus petit module de continuité, borne inférieure de tous ses modules de continuité. Ce module minimal sera appelé le module de continuité de f .

2) La somme de deux fonctions admet comme module le continuité la somme de deux modules de continuité respectifs.

2. Ce lemme pourrait encore s'adapter au cas où l'espace de définition est un espace métrique non borné. Mais il faudrait alors envisager des modules de continuité définis sur toute la demi-droite et croissant indéfiniment sur cette droite. Nous préférons nous en tenir, dans ce mémoire, conformément à (1.2) à des modules de continuité α constants pour $x \geq d$.

3) Cherchons un module de continuité pour le produit h de deux fonctions bornées f et g (à valeurs dans une algèbre normée). L'identité

$$h(M) - h(N) = \frac{f(M) + f(N)}{2} \cdot \{g(M) - g(N)\} + \frac{g(M) + g(N)}{2} \cdot \{f(M) - f(N)\}$$

montre que l'on peut prendre pour module de continuité de h une fonction

$$(2.1) \quad \alpha_h \geq \|f\| \cdot \alpha_g + \|g\| \cdot \alpha_f$$

où $\|f\|$ désigne la borne supérieure de $\|f(M)\|$ sur son espace de définition.

4) Si f est une fonction 1 fois continûment dérivable définie sur un pavé compact de R^n , on peut prendre

$$(2.2) \quad \alpha_f(x) = \|f\| \cdot x$$

où $\|f\|$ désigne une norme supérieure au maximum des dérivées partielles du premier ordre de f .

3. Produit tensoriel symétrique.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Bornons nous à rappeler une définition, renvoyant pour plus de détails à (B. Alg. Chap. IV, § 1 Exercices 1 à 5; et à C. Chevalley, Théorie des groupes de Lie. Tome II., Chapitre 1).

Considérons l'algèbre tensorielle $\bigotimes E$ et dans cette algèbre l'idéal S engendré par tous les tenseurs de la forme $x \otimes y - y \otimes x$. Le quotient de $\bigotimes E / S = \odot E$ s'appelle l'algèbre tensorielle symétrique sur E .

Cette algèbre est canoniquement graduée. L'addition et le produit y sont définis intrinsèquement. Mais si l'on choisit une base $\{e_i\}$ dans E , l'ensemble des monômes en e_i constitue une base de $\odot E$. Et l'addition (resp. le produit) dans $\odot E$, se traduit par l'addition (resp. le produit) des polynômes par rapport aux n indéterminées e_i .

Dans cette représentation, la graduation de $\odot E = \sum_k \odot_k E$ est identique à la graduation des polynômes en polynômes homogènes de différents degrés. Chacun des espaces $\odot_k E$ est de dimension finie. On pose $\odot E = E$. L'espace $\odot_k E$, quotient de $\bigotimes_k E$, est aussi isomorphe canoniquement à un sous-espace de $\bigotimes_k E$. A savoir, le sous-espace engendré par les tenseurs

$$\vec{V}_1 \odot \vec{V}_2 \odot \dots \odot \vec{V}_k = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \varphi_k} \vec{V}_{\sigma(1)} \otimes \vec{V}_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes \vec{V}_{\sigma(k)}$$

où φ_k désigne le k ème groupe symétrique.

Notations pour les normes. Choisissons une fois pour toute une norme sur E (par exemple la norme euclidienne) que nous noterons $\|\cdot\|$. On peut toujours trouver sur $\odot^k E$ une norme (également notée $\|\cdot\|$) telle que pour tout tenseur symétrique décomposable $T = \vec{V}_1 \odot \vec{V}_2 \odot \dots \odot \vec{V}_k$ la formule $\|T\| = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \dots \|\vec{V}_k\|$ soit valable. Nous choisirons une fois pour toute une telle norme pour chaque espace $\odot^k E$.

Soit maintenant un espace de Banach $\mathfrak{B}$, dont la norme est également notée $\|\cdot\|$. Sur les espaces $\mathfrak{L}(\odot^k E, \mathfrak{B})$ d'applications linéaires de $\odot^k E$ dans $\mathfrak{B}$, nous utiliserons la norme canonique (notée $\|\cdot\|$). Par convention, nous identifierons $\mathfrak{L}(\odot^0 E, \mathfrak{B})$ à $\mathfrak{B}$. ($\odot^0 E$ est isomorphe au corps de base: à tout $b \in \mathfrak{B}$ nous faisons correspondre l'application $\lambda \rightarrow \lambda b$ qui appartient à $\mathfrak{L}(\odot^0 E, \mathfrak{B})$).

Soit $L^k \in \mathfrak{L}(\odot^k E, \mathfrak{B})$. C'est une application linéaire de $\odot^k E$ dans $\mathfrak{B}$. Pour un tenseur symétrique $T \in \odot^k E$, L^k prend une valeur que nous écrivons $L^k[T] \in \mathfrak{B}$.

Soit maintenant S un tenseur symétrique appartenant à $\odot^p E$ avec $p < k$. Le symbole $L^k[S]$ désignera l'élément de $\mathfrak{L}(\odot^{k-p} E, \mathfrak{B})$ qui à tout tenseur symétrique $U \in \odot^{k-p} E$, fait correspondre l'élément $L^k[S \odot U]$.

Dans tout ce mémoire, les fonctions linéaires définies sur un espace $\odot^k E$ joueront un rôle particulier. Nous réserverons le crochet pour désigner les variables qui interviennent linéairement dans une formule. Par exemple, un symbole tel que $L[T_0](M_0)$, signifiera que L dépend linéairement d'un tenseur T , et dépend par ailleurs d'un paramètre M , et que l'on prend la valeur de L , pour $T = T_0$ et $M = M_0$.

4. Polynômes à valeurs vectorielles.

Soit A un point de $E = R^n$. Et soit $(L_A^0, L_A^1, L_A^2, \dots, L_A^m)$ un élément du produit des $m+1$ espaces $\mathfrak{L}(\odot^k E, \mathfrak{B})$ où $k = 0, 1, \dots, m$. On peut alors construire une fonction, définie dans E et à valeurs dans $\mathfrak{B}$, grâce à la formule

$$(4.1) \quad M \rightarrow P(M) = L_A^0 + L_A^1[\vec{AM}] + \frac{1}{2!} L_A^2[\vec{AM} \odot \vec{AM}] \\ + \frac{1}{3!} L_A^3[\vec{AM} \odot \vec{AM} \odot \vec{AM}] + \dots + \frac{1}{m!} L_A^m[\odot^m \vec{AM}].$$

Une telle fonction s'appellera une fonction-polynôme (plus brièvement un polynôme) du même degré, définie sur E , et à valeurs dans $\mathfrak{B}$.

Le deuxième membre de la formule précédente s'appelle le développement du polynôme au point A .

La notion de polynôme, ne dépend qu'en apparence, du choix du point A . Posons en effet, $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$, et développons les puissances tensorielles $\odot_k(\vec{AB} + \vec{BM})$, par la formule du binôme de Newton. Il suffit de poser

$$(4.2) \quad L_B^k = \sum_{p=0}^{p=m-k} \frac{1}{p!} L_A^{k+p} [\odot^p \vec{AB}]$$

pour trouver l'identité fondamentale, qui relie les développements d'une même fonction-polynôme, aux divers points de E .

$$(4.3) \quad \sum_{k=0}^{k=m} \frac{1}{k!} L_A^k [\odot^k \vec{AM}] = \sum_{k=0}^{k=m} \frac{1}{k!} L_B^k [\odot^k \vec{BM}].$$

La formule (4.2) est la formule de Taylor, pour les polynômes. Elle implique, en particulier, que l'application $B \rightarrow L_B^k$ est elle-même une fonction polynôme de $(m-k)$ ème degré, à valeurs dans $\mathfrak{B}(\odot^k E, \mathfrak{B})$.

Remarque. Au § 6 nous introduirons la notion de dérivée. Il apparaîtra alors que les coefficients L_A^k ne sont autres que les dérivées $D_A^k P$ de la fonction-polynôme P . Nous allons adopter dès maintenant ces notations : la formule (4.2) se transcrit alors sous l'une des formes :

$$(4.2 \text{ bis}) \quad D_B^k P = \sum_{p=0}^{p=m-k} \frac{1}{p!} D_A^{k+p} P [\odot^p \vec{AB}]$$

$$(4.2 \text{ ter}) \quad D_{A+V}^k P = \sum_{p=0}^{p=m-k} \frac{1}{p!} D_A^{k+p} P [\odot^p \vec{V}].$$

5. Calcul des coefficients d'un polynôme.

La donnée des $D_A^k P$ détermine par définition la fonction-polynôme P . Inversement la connaissance des valeurs que prend le polynôme en un nombre fini de points A_j convenablement choisis⁽³⁾ détermine le

3. Le calcul des coefficients d'un polynôme de degré m , à n variables en fonction des valeurs prises en un nombre suffisant de points A_j , s'obtient par résolution d'un système linéaire. Dans le cas où $n=1$ on aboutit à la classique formule d'interpolation de Lagrange. Le déterminant du système est alors un déterminant de Vandermonde ;

polynôme: On peut trouver un nombre fini de points A_j , et des polynômes Q_j (à valeurs dans le corps de base) tel que:

$$(5.1) \quad P \equiv \sum_j P(A_j) \cdot Q_j$$

pour tout polynôme P de degré $\leq m$. Les polynômes Q_j , associés aux points A_j , ne dépendent pas de l'espace de Banach $\mathfrak{B}$, où P prend ses valeurs.

Identifions les coefficients des deux membres dans le développement au point O

$$(5.1 \text{ bis}) \quad D_0^k P = \sum_j P(A_j) \otimes D_0^k Q_j.$$

Posons $\vec{V}_j = \vec{OA}_j$.

Nous allons démontrer la formule:

$$(5.2) \quad D_0^k P = \sum_j \frac{1}{t^k} P(O + t\vec{V}_j) \otimes D_0^k Q_j.$$

Celle-ci est évidente si P est un monôme du k ème degré. Si P est un monôme du h ème degré $h \neq k$, le premier membre de (5.2) est nul par définition (cf. Formule 4.1). On peut alors, après avoir remplacé dans (5.1 bis) $P(A_j)$ par $\frac{1}{t^h} \cdot P(O + t\vec{V}_j)$, multiplier le second membre par t^{h-k} , sans que le second membre cesse d'être nul. La formule (5.2) étant établie pour les monômes est vraie quelque soit le polynôme P .

En posant $D_0^k Q_j = C_j^k \in \mathfrak{L}(\odot E, R)$, on trouve par translation, la formule

$$(5.3) \quad D_M^k P = \sum_j \frac{1}{t^k} P(M + t\vec{V}_j) \otimes C_j^k,$$

qui exprime $D_M^k P$, comme combinaison linéaire des valeurs de P , aux points $M_j = M + t\vec{V}_j$, arbitrairement voisins de M , si t tend vers 0.

L'espace des polynômes du même degré à valeurs dans $\mathfrak{B}$. Par définition cet espace est isomorphe au produit des $m+1$ espaces de Banach $\mathfrak{L}(\odot E, \mathfrak{B})$. On peut définir la topologie de ce produit à l'aide de diverses normes (équivalentes) parmi lesquelles les deux suivantes nous seront utiles:

pour obtenir un système de Cramer, il suffit de choisir les A_j distincts. Dans le cas général, le choix des A_j n'est soumis qu'à une seule restriction: le déterminant du système (qui n'est plus un déterminant de Vandermonde) ne doit pas être nul. (cf. Popoviciu [1]).

a) Étant donné un point A , nous poserons,

$$\|P\|_A^m = \text{Max}_{k=0, 1, \dots, m} \left(\frac{1}{k!} \|P_A^{(k)}\| \right).$$

b) Étant donné un point A ,

$$[[P]]_A^m = \text{Sup}_{M \in E} \frac{\|P(M)\|}{\{1 + \|AM\|\}^m}.$$

Ces deux normes sont équivalentes: En effet, d'une part

$$[[P]]_A^m \leq \|P\|_A^m \cdot \frac{1 + \|AM\| + \|AM\|^2 + \dots + \|AM\|^m}{\{1 + \|A\|\}^m} \leq \|P\|_A^m$$

d'autre part la formule (5.1) montre qu'il existe un ensemble fini F de points de E , tel que les coefficients $D_A^k P$ du polynôme P s'expriment en fonction linéaire des $P(A_j)$, où $A_j \in F$.

On en déduit aussitôt une majoration

$$\|P\|_A^m \leq \frac{1}{\Gamma} \cdot \text{Max}_{A_j \in F} \frac{\|P(A_j)\|}{\{1 + \|AA_j\|\}^m} \leq \frac{1}{\Gamma} [[P]]_A^m.$$

En résumé il existe une constante Γ indépendante du point A choisi, par raison de translation, telle que

$$(5.4) \quad \Gamma \|P\|_A^m \leq [[P]]_A^m \leq \|P\|_A^m.$$

6. Fonctions m -fois continûment dérivables.

Définition 1. On dit qu'une fonction définie sur un pavé compact K de R^n à valeurs dans un espace de Banach $\mathfrak{B}$, est 1-fois continûment dérivable, s'il existe une application continue de K dans $\mathfrak{L}(E, \mathfrak{B})$, $M \rightarrow D_M^1 f$ appelée différentielle (ou dérivée) de f , et telle que

$$(6.1) \quad \frac{\|f(M) - f(A) - D_A^1 f[\vec{AM}]\|}{\|AM\|}$$

tende vers 0, lorsque M tend vers A , dans K .

Définition 2. Une fonction m -fois continûment dérivable se définit par récurrence: c'est une fonction 1-fois continûment dérivable, dont la dérivée première est $m-1$ fois continûment dérivable.

La dérivée de la dérivée est une application continue de K dans $\mathfrak{L}(E, \mathfrak{L}(E, \mathfrak{B}))$. Il résulte du classique théorème de Schwarz (permutabilité des dérivations partielles) que l'on peut identifier cette "dérivée seconde" à une application de K , dans $\mathfrak{L}(\odot^2 E, \mathfrak{B})$; plus généralement, nous identifions les dérivées $k^{\text{èmes}}$ à des applications de K dans $\mathfrak{L}(\odot^k E, \mathfrak{B})$.

A toute application m -fois continûment dérivable f , correspond ainsi en A un élément $(D_A^0 f = f(A), D_A^1 f, D_A^2 f, \dots, D_A^m f)$ du produit des $m+1$ espaces $\mathfrak{L}(\odot E, \mathfrak{B})$ $k=0, 1, 2, \dots, m$, qui permet de construire, en chaque point A un polynôme appelé "polynôme de Taylor" de f , au point A .

(6.2)

$$T_A f(M) = f(A) + D^1 f[\vec{AM}] + \frac{1}{2!} D^2 f[\vec{AM} \odot \vec{AM}] + \dots + \frac{1}{m!} D^m f[\overset{m}{\odot} \vec{AM}].$$

Proposition 1. Étant donnée une fonction m -fois continûment dérivable f , l'inégalité suivante est identiquement vérifiée, lorsque α désigne un module de continuité de l'application $M \rightarrow D_M^m f$.

$$(6.3) \quad \|f(M) - T_A f(M)\| \leq \frac{\|AM\|^m}{m!} \cdot \alpha(\|AM\|).$$

On sait que si f est m -fois continûment dérivable, f est faiblement m -fois continûment dérivable. Cela signifie que pour tout $\mu \in \mathfrak{B}'$ (dual de $\mathfrak{B}$); la fonction numérique $M \rightarrow \langle \mu, f(M) \rangle$ est m fois continûment dérivable et $D_A^m \langle \mu, f \rangle = \langle \mu, D_A^m f \rangle$. (Le deuxième membre désigne l'élément de $\mathfrak{L}(\odot E, \mathfrak{B})$ qui à $T \in \odot E$ fait correspondre $\langle \mu, D_A^m f[T] \rangle$).

Appliquons la formule classique de Taylor, avec reste de Lagrange, à la fonction numérique $f_\mu = \langle \mu, f \rangle$. Il existe un point C (dépendant en général de μ) sur le segment AM , tel que

$$f_\mu(M) = f_\mu(A) + D_A^1 f_\mu[\vec{AM}] + \frac{1}{2!} D_A^2 f_\mu[\vec{AM} \odot \vec{AM}] + \dots + \frac{1}{(m-1)!} D_A^{m-1} f_\mu[\overset{m-1}{\odot} \vec{AM}] + D_C^m f_\mu[\overset{m}{\odot} \vec{AM}].$$

Il en résulte que :

$$f_\mu(M) - T_A f_\mu(M) = \frac{1}{m!} (D_C^m f_\mu[\overset{m}{\odot} \vec{AM}] - D_A^m f_\mu[\overset{m}{\odot} \vec{AM}]).$$

Le module du second membre se majore comme suit :

$$\begin{aligned} |D_C^m f_\mu[\overset{m}{\odot} \vec{AM}] - D_A^m f_\mu[\overset{m}{\odot} \vec{AM}]| &= |\langle \mu, D_C^m f[\overset{m}{\odot} \vec{AM}] - D_A^m f[\overset{m}{\odot} \vec{AM}] \rangle| \\ &\leq \|\mu\| \cdot \|D_C^m f - D_A^m f\| \cdot \|\overset{m}{\odot} \vec{AM}\| \leq \|\mu\| \cdot \|\vec{AM}\|^m \cdot \alpha(\|\vec{AC}\|). \end{aligned}$$

Notons que nous avons utilisé ici le fait que K est un ensemble convexe ce qui implique que le point C situé sur le segment AM , est dans K . La croissance de α entraîne que $\alpha(\|AC\|) \leq \alpha(\|AM\|)$.

Finalement :

$$|\langle \mu, f(M) - T_A f(M) \rangle| \leq \|\mu\| \cdot \frac{1}{m!} \cdot \|\vec{AM}\|^m \cdot \alpha(\|\vec{AM}\|).$$

En faisant parcourir à μ la boule unité du dual de $\mathfrak{B}$ on conclut que (B.E.V.T. Chap. IV §5 Prop. 4)

$$(6.4) \quad \|f(M) - T_A f(M)\| \leq \frac{1}{m!} \|\vec{AM}\|^m \alpha(\|\vec{AM}\|).$$

Définition. Un champ taylorien (ou champ de polynômes) du même ordre, défini sur un fermé $F \subset K$, est une application de F , dans l'espace des polynômes de degré $\leq m$, à valeurs dans un espace de Banach $\mathfrak{B}$.

Nous allons maintenant compléter la Proposition I, par sa réciproque :

Proposition II. Soit $M \rightarrow P_M$ un champ taylorien d'ordre m défini sur K . La condition nécessaire et suffisante pour que les P_M soient les polynômes de Taylor $T_M f$ d'une fonction f , m fois continûment dérivable est qu'il existe un module de continuité α , satisfaisant à l'inégalité

$$(6.5) \quad \|P_M(M) - P_A(M)\| \leq \frac{1}{m!} \cdot \|\vec{AM}\|^m \cdot \alpha(\|\vec{AM}\|).$$

a) La fonction f que nous cherchons ne peut être que $f(M) = P_M(M)$. L'inégalité (6.5) implique que $f(M)$ est continue

$$\|f(M) - f(N)\| \leq \|P_M(M) - P_N(M)\| + \|P_N(M) - P_N(N)\|$$

car la première différence tend vers 0, lorsque $M \rightarrow N$, en vertu de (6.5) et la seconde différence en vertu de la continuité du polynôme P_N .

Notons aussi l'inégalité suivante, où ρ désigne le maximum de $\|AB\|$, $\|\vec{AM}\|$.

$$(6.5 \text{ bis}) \quad \begin{aligned} \|P_A(M) - P_B(M)\| &\leq \|P_A(M) - P_M(M)\| + \|P_M(M) - P_B(M)\| \\ &\leq \frac{2^m + 1}{m!} \cdot \rho^m \cdot \alpha(\rho). \end{aligned}$$

b) Démontrons qu'il existe une constante C , telle que

$$(6.6) \quad \|D_M^k P_M - D_M^k P_A\| \leq \frac{1}{(m-k)!} \cdot \|\vec{AM}\|^{m-k} \cdot C \cdot \alpha(\|\vec{AM}\|).$$

Nous appliquons la formule d'interpolation (5.3) au polynôme $P_M - P_A$.

$$D_M^k P_M - D_M^k P_A = \sum \frac{1}{t^k} C_j^k \otimes [P_M(M + t \vec{V}_j) - P_A(M + t \vec{V}_j)].$$

En choisissant le nombre

$$t = \frac{\|\vec{AM}\|}{\sup_j \|\vec{V}_j\|},$$

ce qui implique $\|\vec{AM}\| \geq t \|\vec{V}_j\|$ et en appliquant (6.5 bis) aux différences du second membre, on aboutit à la formule (6.6), où C se majore immédiatement en fonction des $\|C_j^k\|$.

c) Le champ taylorien $M \rightarrow D_M^k P_M$ d'ordre $m-k$, défini à partir de l'espace de Banach $\mathfrak{L}(\odot E, \mathfrak{B})$, satisfait à une inégalité du type (6.5) (avec $m-k$ au lieu de m). Il résulte de a) que l'application $M \rightarrow D_M^k P_M$ est continue.

d) Il reste à montrer que $f(M)$ est 1 fois continûment dérivable, et admet $D_M^1 P_M$ comme dérivée au point M , pour que la proposition s'en déduise par récurrence sur k .

Or $f(M) - f(A) - D_A^1 P_A [\vec{AM}]$ se déduit de $f(M) - P_A(M)$ par suppression des monômes $\frac{1}{k!} D_A^k P_A [\odot^k \vec{AM}]$ pour $k \geq 2$.

Il en résulte que $\|f(M) - f(A) - D_A^1 P_A [\vec{AM}]\| = o(\|\vec{AM}\|)$ ce qui signifie bien que $f(M)$ admet $D_M^1 P_M$ comme dérivée.

Remarque. La partie a) du raisonnement précédent ne suppose pas que le champ taylorien P soit défini sur tout l'ensemble K . Mais b) suppose que pour tout point M de l'ensemble de définition, F , on puisse trouver suffisamment de points $M + t \vec{V}_j \in F$. Ce qui explique l'importance de l'hypothèse $F = K$.

En résumé, nous voyons que toute fonction f m -fois continûment dérivable définie sur un pavé compact K , satisfait aux inégalités suivantes (inégalités de Whitney).

$$(W) \quad \|D_M^k f - T_A^k f(M)\| \leq \frac{\|\vec{AM}\|^{m-k}}{(m-k)!} \cdot \alpha(\|\vec{AM}\|) \quad k = 0, 1, \dots, m$$

A et $M \in K$, où $T_A^k f(M)$ désigne le polynôme $\sum \frac{1}{p!} D_A^{k+p} f[\odot^p AM]$ à valeurs dans $\mathfrak{L}(\odot E, \mathfrak{B})$.

La Proposition I signifie qu' α peut être un module de continuité quelconque de $D_M^m f$; la Proposition II implique que la première inégalité

W (pour $k=0$ entraîne les inégalités suivantes ($k=1, 2, \dots, m$), à condition de substituer C . α à α .

Définition. Étant donnée une application m -fois continûment dérivable f nous dirons qu' α est un module de continuité d'ordre m pour f , ou un m -module de continuité pour f , si α est un module de continuité vérifiant les inégalités (W).⁽⁴⁾

7. Une notation abrégée.

Étant donnée une fonction m -fois continûment dérivable,⁽⁵⁾ définie dans K , nous écrirons en tout point $A \in K$: $f(M) = T_A f(M) + R_A f(M)$. ($R_A f$ s'appellera le "reste" au point A).

Les identités suivantes sont immédiates, mais utiles.

$$(7.1) \quad T_A(T_B f) = T_B f$$

$$(7.2) \quad R_A(T_B f) = 0$$

$$(7.3) \quad R_A(R_B f) = R_A f.$$

(Ces formules expriment la formule (4.3)).

$$(7.4) \quad T_A(R_B f) = -T_B(R_A f) = T_A f - T_B f = R_B f - R_A f.$$

On obtient cette dernière égalité en calculant $T_A f = T_A(T_B f + R_B f)$ et en tenant compte des précédentes.

Fixant A et dérivant par rapport à M , on obtient

$$D_M^k f = D_M^k(T_A f) + D_M^k(R_A f)$$

que nous abrègerons sous la forme

$$(7.5) \quad D_M^k f = T_M^k f + R_M^k f.$$

Cette dernière formule peut s'énoncer:

"Le reste au point M de la fonction $m-k$ fois continûment dérivable $M \rightarrow D_M^k f$ est la dérivée k -ième du reste de la fonction m -fois continûment dérivable $M \rightarrow f(M)$ ".

Notons que l'application $A \rightarrow T_A f$ n'est en général pas dérivable, (si $A \rightarrow D_A^m f$ ne l'est pas).

4. Ne pas confondre ces trois notions distinctes: module de continuité (cf. §1), module de continuité d'une fonction f (§2) et m -module de continuité de f : (Prop. 1).

5. Les formules de ce §, de caractère algébrique, s'appliquent aussi aux W -champs tayloriens qui seront définis au § 11.

Rappelons encore une fois, les formules (W)

$$(W) \quad \|R_A^k f(M)\| \leq \frac{\|\vec{AM}\|^{m-k}}{(m-k)!} \cdot \alpha(\|\vec{AM}\|).$$

8. Proposition III. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément taylorien défini sur K représente une fonction m -fois continûment dérivable, est qu'il existe un module de continuité β , tel que pour tout couple de points A et B appartenant à K , et pour tout point M de R^n , on ait

$$(8.1) \quad \|T_A f(M) - T_B f(M)\| \leq \frac{\{\|\vec{AB}\| + \|\vec{AM}\|\}^m}{m!} \cdot \beta(\|AB\|).^{(6)}$$

a) Choisissons A et B dans K , et cherchons à majorer

$$\|T_A f(M) - T_B f(M)\|$$

en supposant, par hypothèse, que les formules (W) soient satisfaites

$$P_{A,B} f = T_A f - T_B f$$

est un polynôme, dont nous allons écrire le développement au point A

$$(8.2) \quad P_{A,B} f(M) = \sum_{k=0}^{k=m} \frac{1}{k!} \cdot \{T_A^k f(A) - T_B^k f(A)\} [\odot \vec{AM}].$$

Or par définition même $T_A^k f(A) = D_A^k f$.

Il en résulte que l'accolade représente le premier membre de la formule (W). Il s'ensuit

$$\|P_{A,B} f(M)\| \leq \sum_{k=0}^{k=m} \frac{1}{k! \cdot (m-k)!} \cdot \|\vec{AB}\|^{m-k} \cdot \|\vec{AM}\|^k \cdot \alpha(\|\vec{AB}\|).$$

Compte tenu de la formule du binôme de Newton on obtient la majoration (8.1) en prenant $\beta = \alpha$.

b) Partant de (8.1), nous allons en déduire les formules (W). Pour cela effectuons dans (8.2) le changement de variable

$$\vec{AM} = \|\vec{AB}\| \cdot \vec{AN}.$$

On obtient ainsi un polynôme en N que nous appellerons

$$\tilde{P}_{A,B} f(N) = \sum_{k=0}^{k=m} \frac{1}{k!} \|\vec{AB}\|^k \cdot \{T_A^k f(A) - T_B^k f(A)\} [\odot \vec{AN}].$$

6. La démonstration que nous donnons ici s'applique aussi à la Proposition VI ci-dessous.

Par hypothèse :

$$\|\tilde{P}_{A,B} f(N)\| \leq \frac{\|\vec{AB}\|^m (1 + \|\vec{AN}\|)^m}{m!} \cdot \beta(\|\vec{AB}\|)$$

pour A et B dans K , et N dans E .

La formule (5.4) indique que

$$\frac{\|\tilde{P}_{A,B} f(N)\|}{(1 + \|\vec{AN}\|)^m} \leq \frac{\|\vec{AB}\|^m}{m!} \cdot \beta(\|\vec{AB}\|)$$

entraîne

$$\|T_A^k f(A) - T_B^k f(A)\| \leq \frac{\|\vec{AB}\|^{m-k}}{(m-k)!} \cdot \frac{\beta(\|\vec{AB}\|)}{\Gamma}$$

ce qui redonne les formules (W) avec $\alpha = \beta/\Gamma$.

Remarque. La formule (5.4) introduit une norme $[[P]]_A^m$ d'aspect compliqué. On pourrait songer à utiliser la norme plus simple :

$$\|P\|_{K_1}^0 = \max_{M \in K_1} \|P(M)\|$$

où K_1 est un pavé compact. Cette norme est d'ailleurs équivalente à $[[P]]_A^m$: il existe une constante Γ_1 telle que

$$[[P]]_A^m \leq \Gamma_1 \|P\|_{K_1}^0.$$

Mais la norme $\|\cdot\|_{K_1}^0$ est inutilisable dans la démonstration de la Prop. III, car K_1 n'est pas stable par les homothéties $\vec{AM} = \|\vec{AB}\| \cdot \vec{AN}$, que nous avons fait intervenir. D'où l'utilité de la norme $[[P]]_A^m$ (R^n est stable par les dites homothéties).

Une fois la Proposition III établie on peut montrer que la condition (8.1) (où $M \in R^n$) peut être remplacée par la condition (8.1 bis) d'apparence plus faible

$$(8.1 \text{ bis}) \quad \|T_A f(M) - T_B f(M)\| \leq \{\|\vec{AB}\| + \|\vec{AM}\|\}^m \beta'(\|\vec{AB}\|)$$

avec A et $B \in K$, $M \in K_1$ (K_1 est un pavé compact tel que $K \cap \bar{CK}_1 = \emptyset$). Pour fixer les idées supposons que la distance de K à $\bar{CK}_1$ soit supérieure à 1 et appelons d , le diamètre de K .

En effet, pour tout point $M \in \bar{CK}_1$, on a $\|\vec{AM}\| \geq 1$ et

$$\begin{aligned} \frac{\|T_A f(M) - T_B f(M)\|}{2 \|\vec{AM}\|^m} &\leq \frac{\|T_A f(M) - T_B f(M)\|}{(1 + \|\vec{AM}\|)^m} \leq [[T_A f - T_B f]]_A^m \\ &\leq \Gamma_1 \|T_A f - T_B f\|_{K_1}^0. \end{aligned}$$

Or d'après (8.1 bis) $\|T_A f - T_B f\|_{K_1}^0 \leq (1 + d)^m \beta'(\|\vec{AB}\|)$.

On en déduit, pour $M \in \overline{CK}_1$

$$\|T_A f(M) - T_B f(M)\| \leq \|AM\|^m \cdot (2 + 2d)^m \beta'(\|AB\|)$$

ce qui implique (8.1) avec $\beta \geq (2 + 2d)^m \beta'(\|AB\|)$.

9. La formule de Leibniz.

Supposons maintenant que $\mathfrak{B}$ soit une algèbre de Banach. En multipliant les développements de Taylor de deux fonctions f et g , et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à m , on trouve :

$$(9.1) \quad T_A(fg)(M) = \sum_{p+q \leq m} \frac{1}{p!q!} \cdot D_A^p f[\overset{p}{\odot} \vec{AM}] \cdot D_A^q g[\overset{q}{\odot} \vec{AM}].$$

L'application $(T, T') \rightarrow D_A^p f[T] \cdot D_A^q g[T']$ de $\overset{p}{\odot} E \times \overset{q}{\odot} E$ dans $\mathfrak{B}$ est bilinéaire. Il lui correspond donc une application linéaire de $(\overset{p}{\odot} E) \otimes (\overset{q}{\odot} E)$ dans $\mathfrak{B}$.

Un procédé classique de symétrisation permet d'en déduire une application linéaire de $(\overset{p}{\odot} E) \odot (\overset{q}{\odot} E) = \overset{p+q}{\odot} E$ dans $\mathfrak{B}$, $D_A^p f \odot D_A^q g$, telle que $(D_A^p f \odot D_A^q g)[\overset{p+q}{\odot} \vec{V}] = D_A^p f[\overset{p}{\odot} \vec{V}] \cdot D_A^q g[\overset{q}{\odot} \vec{V}]$.

Avec ces notations, on a la formule de Leibniz

$$(9.2) \quad D_A^k(fg) = \sum_{p=0}^{p=k} \binom{k}{p} D_A^p f \odot D_A^{k-p} g.$$

Naturellement cette formule reste valable, lorsque f et g prennent leurs valeurs dans des espaces différents $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$, et qu'il existe une "multiplication", c'est à dire une application linéaire de $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ dans un troisième espace de Banach $\mathfrak{B}_3$.

Ce sera en particulier le cas, lorsque $\mathfrak{B}_1$ sera un $\mathfrak{B}_2$ -module (alors $\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}_1$).

Ce sera aussi le cas, lorsque $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{L}(\overset{p}{\odot} E, \mathfrak{B})$, $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{L}(\overset{q}{\odot} E, \mathfrak{B})$ et $\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{L}(\overset{p+q}{\odot} E, \mathfrak{B})$ et que la multiplication est la loi de composition $\odot$ précédemment définie ($\mathfrak{B}$ étant une algèbre).

Ce qui s'écrit

$$(9.3) \quad D_A^k(D_M^r f \odot D_M^s g) = \sum_{p=0}^{p=k} \binom{k}{p} D_A^{r+p} f \odot D_A^{s+k-p} g.$$

Un autre cas particulier important est celui où $\mathfrak{B}_2$ est un espace E_1 de dimension finie (qui sera parfois E ; ou bien un espace $\overset{r}{\odot} E$), où $\mathfrak{B}_1$ est

l'espace $\mathfrak{L}(E_1, \mathfrak{B})$, et où l'on prend comme "multiplication" à valeur dans $\mathfrak{B}$, l'opération qui à $L \in \mathfrak{L}(E_1, \mathfrak{B})$ et $\vec{U} \in E_1$, fait correspondre $L[\vec{U}]$.

En particulier, la dérivée d'une fonction m -fois continûment dérivable à valeurs dans $\mathfrak{B}$ de la forme $M \rightarrow L_M[\vec{U}_M]$, s'écrit :

$$(9.4) \quad D_A^k L_M[U_M] = \sum_{p=0}^{k-p} \binom{k}{p} D_A^{k-p} L [D_A^p U].$$

Rappelons la signification de $D_A^{k-p} L [D_A^p U]$: c'est un élément de $\mathfrak{L}(\odot^k E, \mathfrak{B})$. Calculons sa valeur pour $\odot^k \vec{V}$; à $(\odot^k \vec{V})$ (où $V \in E$) $D^p U$ fait correspondre l'élément $D^p U [\odot^p \vec{V}] \in E_1$. Par ailleurs $D_A^{k-p} L$ est un élément de $\mathfrak{L}(\odot^{k-p} E, \mathfrak{L}(E_1, \mathfrak{B}))$.

Donc $D_A^{k-p} L [\odot^{k-p} \vec{V}]$ est un élément de $\mathfrak{L}(E_1, \mathfrak{B})$; et

$$D_A^{k-p} L [\odot^{k-p} \vec{V}] [D_A^p U [\odot^p \vec{V}]]$$

est un élément de $\mathfrak{B}$.

C'est par définition l'élément

$$D_A^{k-p} L [D_A^p U] [\odot^k \vec{V}].$$

Nous aurons à utiliser cette formule notamment dans le cas suivant. Soit f une fonction m -fois continûment dérivable. Soit $M \rightarrow \vec{U}(M)$ un champ de vecteurs à valeurs dans R^n , $m-1$ fois continûment dérivable. La fonction $M \rightarrow D_M^1 f[\vec{U}(M)]$ est $m-1$ fois continûment dérivable. C'est la formule (9.4) qui donnera ses dérivées.

Dérivation d'une fonction composée. Soit K un pavé compact de R^n . Soit Φ une application m -fois continûment dérivable de K , dans un espace $R^{n'}$. Donnons nous enfin une fonction f définie dans un pavé compact H de $R^{n'}$, tel que $\Phi(K) \subset H$. Il s'agit de calculer les dérivées de la fonction composée $M \rightarrow f(\Phi(M))$.

On peut pour cela utiliser sans aucune modification la raisonnement de l'Exercice 7 de B. Fonct. Var. réelle: Chap. I, § 3. Dans cet exercice comme dans notre cas tout se ramène à un recensement exact des termes qui ne sont pas négligeables devant $\|\vec{A}\vec{M}\|$ dans le composé de deux polynômes de Taylor.

On trouve alors un résultat de la forme

$$(9.5) \quad D_A^k f(\Phi) = \sum \frac{k!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_q!} D_{\Phi(A)}^p f [T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}].$$

La somme est étendue à tous les systèmes d'entiers μ_i strictement positifs tels que $\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 \dots q\mu_q = k$.

L'on désigne par p la somme $p = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_q$. Quant au tenseur $T_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q}$, il représente un élément de $\mathfrak{L}(\odot E, \odot^p E)$.

$$T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q} = \frac{\odot^{\mu_1} D_A^1 \Phi}{1!} \odot \frac{\odot^{\mu_2} D_A^2 \Phi}{2!} \odot \dots \odot \frac{\odot^{\mu_q} D_A^q \Phi}{q!}.$$

Cherchons l'image de $\odot^k V$, par cet élément de $\mathfrak{L}(\odot^k E, \odot^p E)$. $D_A^q \Phi$ applique $\odot^q V$ dans E . $\odot^{\mu_q} D_A^q \Phi$ applique donc $\odot^{\mu_q} V$ dans $\odot^{\mu_q} E$. Et le produit tensoriel de ces q facteurs applique $\odot^k V$ sur le produit tensoriel symétrique des images de chaque facteur, c'est à dire dans $\odot^p E$.

On notera la concision de la formule (9.5), en regard de ce qu'elle devient par transcription dans un système de coordonnées, ne fût-ce que pour de petites valeurs de m et n .

10. Normes sur $\mathfrak{D}(K, \mathfrak{B})$. Quelques majorations.

a) Dans l'espace des fonctions m -fois continûment dérivables définies sur K , nous utiliserons les normes suivantes :

$\|f\|_K^k$ désignera, pour $k \leq m$ le maximum pour $p \leq k$ des expressions

$$(10.1) \quad (\text{Max}_{M \in K} \|D_M^p f\|)$$

$\|f\|_K^k$ est la norme de la convergence uniforme des k premières dérivées. On sait que $\mathfrak{D}^m(K, \mathfrak{B})$ est complet pour la norme $\|f\|_K^m$

(10.2) En particulier $\|f\|_K^0 = \text{Max}_{M \in K} \|f(M)\|$.

A côté de ces normes, nous utiliserons fréquemment, (F étant une partie compacte de K), les semi-normes $\|f\|_F^k$ qui se définissent comme les précédentes, mais en substituant F à K dans la formule (10.1).

b) Majoration de $\|T_A f\|_K^m$.

On a

$$\|T_A f(M)\| \leq \|f\|_K^m (1 + \|\vec{AM}\| + 1/2! \cdot \|\vec{AM}\|^2 + \dots + 1/m! \cdot \|\odot^m \vec{AM}\|)$$

et en appelant d le diamètre de K

$$\|Tf\|_K^0 \leq \|f\|_K^m \cdot e^d.$$

De même

$$\|T_A^k f\|_K^0 \leq \|f\|_K^m e^d.$$

Enfin

$$(10.3) \quad \|T_A f\|_K^m \leq \|f\|_K^m e^d.$$

Cas particulier: Supposons de plus, que pour un entier $\lambda < m$ les égalités suivantes soient vérifiées:

$$D_A^k f(A) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq k < \lambda.$$

Alors

$$\|T_A f(M)\| \leq \|f\|_K^m \left(\frac{\|\vec{AM}\|^\lambda}{\lambda!} + \dots + \frac{\|\vec{AM}\|^m}{m!} \right).$$

D'où

$$(10.3 \text{ bis}) \quad \|T_A f(M)\| \leq \|f\|_K^m \cdot \|\vec{AM}\|^\lambda \cdot e^d.$$

c) Soit a_f (resp a_g) un m -module de continuité de f (resp g).

Pour trouver un m -module de continuité de $h = f \cdot g$, il suffit de trouver un module de continuité de $D_M^m h$.

Utilisons la formule de Leibniz (9.2). $D_M^m h$ y apparait comme la somme de $m+1$ termes, dont chacun est un $\odot$ -produit: $D_M^p f \odot D_M^{m-p} g$.

Dans chacun de ces $\odot$ -produit (à l'exception des deux extrêmes) les deux facteurs sont au moins 1-fois continûment dérivables.

Dans ce cas $D_M^p f$ admet un module de continuité égal à $\|f\|_K^m \cdot x$, d'après (2.2).

On en déduit pour $D_M^p f \odot D_M^{m-p} g$, d'après (2.1), un module de continuité égal à $2 \cdot \|f\|_K^m \cdot \|g\|_K^m \cdot |x|$.

Évaluant directement un module de continuité pour les termes extrêmes grâce à (2.1), et tenant compte du fait que la somme des coefficients du binôme est 2^m , on trouve pour h , un m -module de continuité égal à:

$$(10.4) \quad \alpha_h(x) = \|f\|_K^m \cdot \|g\|_K^m \cdot 2^{m+1} |x| + \|f\|_K^m \cdot \alpha_g + \|g\|_K^m \cdot \alpha_f.$$

Proposition IV. L'ensemble des fonctions f , m -fois continûment dérivables sur un pavé compact K de R^n , et qui admettent un m -module de continuité proportionnel à un module de continuité α non nul fixé⁽⁷⁾ constitue une algèbre.

En effet, soient f et g appartenant à cet ensemble, et soient λ_f et λ_g

7. Si α est nul, la proposition est fausse (cf. 1.6). "Le produit de deux polynômes du $m^{\text{ème}}$ degré n'est pas du $m^{\text{ème}}$ degré".

des constantes telles que $\lambda_f \cdot \alpha$ (resp. $\lambda_g \cdot \alpha$) soient des modules de continuité pour f (resp. g).

La formule (10.4) devient

$$(10.5) \quad \alpha_{fg} \leq \|f\|_K^m \cdot \|g\|_K^m \cdot 2^{m+1} |x| + (\|f\|_K^m \cdot \lambda_g + \|g\|_K^m \cdot \lambda_f) \alpha(x).$$

Soit alors d le diamètre de K . D'après (1.6) $x \leq d \frac{\alpha(x)}{\alpha(d)}$. Ce qui permet d'écrire :

$$(10.6) \quad \alpha_{fg} \leq \left\{ \|f\|_K^m \cdot \|g\|_K^m \cdot 2^{m+1} \cdot \frac{d}{\alpha(d)} + \|f\|_K^m \cdot \lambda_g + \|g\|_K^m \cdot \lambda_f \right\} \alpha.$$

Le produit fg appartient donc aussi à l'ensemble.

Nous ferons l'étude de ces algèbres au Chapitre IV.

11. Champs W -tayloriens.

Soit F un compact $\subset K$.

Définition. Un Champ W -taylorien d'ordre m défini sur F (appelé encore "champ taylorien m -fois continûment dérivable" au sens de M. Whitney) est un champ taylorien $\{\dot{f}\} = \{M \rightarrow T_M \dot{f}\}$ auquel on peut associer un module de continuité α en sorte que les inégalités (W) soient vérifiées

$$(W) \quad \|T_M^k \dot{f}(M) - T_A^k \dot{f}(M)\| = \|D_M^k \dot{f} - T_A^k \dot{f}(M)\| \\ \leq \frac{\|\vec{AM}\|^{m-k}}{(m-k)!} \cdot \alpha(\|\vec{AM}\|); \quad (A \text{ et } M \in F).$$

$T_A \dot{f}$ s'appellera le "polynôme de Taylor" au point A du W -champ taylorien $\{\dot{f}\}$. On posera $D_M^0 \dot{f} = f(M)$; $D_M^k \dot{f}$ s'appellera la k ème composante de $\{\dot{f}\}$.

Lorsque F est un pavé compact K , la Proposition II montre que la première composante de $\{\dot{f}\}$ est une fonction m -fois continûment dérivable dont les $D_M^k \dot{f}$ sont les dérivées.

Mais il faut se garder de confondre un champ W -taylorien avec une fonction. Déjà lorsque F se réduit à un seul point, la donnée de la première composante ne suffit pas à déterminer $\{\dot{f}\}$.

C'est pourquoi nous avons renoncé à la terminologie de M. Whitney qui parlait de "fonction m -fois continûment dérivable" définie sur un ensemble fermé F .

La majeure partie de ce mémoire est consacrée à l'étude des analogies et des différences entre les notions de fonction et de champ W -taylorien. Nous allons dès maintenant annoncer certains de ces résultats, pour prémunir le lecteur contre certaines erreurs "bien naturelles".

Notons d'abord la

Proposition V. Les applications $M \rightarrow D_M^k \dot{f}$ définies sur F , et à valeurs dans $\mathfrak{Q}(\odot E, \mathfrak{B})$ sont continues.

Nous avons vu lors de la démonstration de la Proposition II a), que l'inégalité (W) pour $k=0$, entraînait la continuité de l'application $M \rightarrow D_M^0 \dot{f}$; nous avons fait remarquer alors que cette partie de la démonstration était valable pour F compact $\subset K$ quelconque.

De même chacune des inégalités (W) entraîne la continuité de l'application $M \rightarrow D_M^k \dot{f}$ correspondante, $k=0, 1, \dots, m$.

1°) Contrairement à la définition d'une fonction m -fois continûment dérivable, lorsqu'un W -champ taylorien est 1-fois continûment dérivable, et que sa dérivée est la première composante d'un W -champ indéfiniment dérivable, le champ W -taylorien n'est pas forcément 2-fois continûment dérivable.

On trouvera en effet au Chapitre II (§ 7) de nombreux exemples de champs W -tayloriens d'ordre 1 $\{f\}$, tel que $D^1 \dot{f}$ soit identiquement nulle (donc d'ordre infini), sans que $D_M^0 \dot{f}$ puisse être la première composante d'un champ W -taylorien d'ordre 2. (Voir aussi Glaeser [3]).

2°) Contrairement à la Proposition II, lorsque F est un fermé quelconque, la première inégalité (W) n'entraîne pas les autres. On trouvera un contre-exemple à la suite de la Proposition VIII).

3°) Par contre, nous avons conduit la démonstration de la Proposition III de telle façon qu'il suffit de remplacer partout K par F pour obtenir la

Proposition VI. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ soit W -taylorien d'ordre m , est qu'il existe un module de continuité α tel que

$$(11.1) \quad \|T_A \dot{f}(M) - T_B \dot{f}(M)\| \leq \left\{ \frac{\vec{AB} + \vec{AM}}{m!} \right\}^m \alpha(\vec{AB})$$

quels que soient A et $B \in F$, et $M \in R^n$ (ou $M \in K$).

4°) L'exemple évoqué au 1°, montre qu'un module de continuité

quelconque de $D^m \dot{f}$ n'est pas un m -module de continuité pour le champ W -taylorien $\{\dot{f}\}$.

5°) L'ensemble des W -champs tayloriens d'ordre m sur un compact F est une algèbre, que nous appellerons l'algèbre de Whitney $W^m(F)$.

Cette algèbre n'est pas, en général, complète pour la norme $\|\cdot\|_F^m$. Supposons que F soit un compact contenu dans le pavé compact K . Toute fonction f m -fois continûment dérivable définie sur K , détermine par restriction un champ W -taylorien d'ordre m sur F .

Inversement le théorème fondamental du prolongement de Whitney affirme que tout champ W -taylorien d'ordre m défini sur F peut se prolonger en une fonction m -fois continûment dérivable définie sur R^n .

Les paragraphes 12—13—14 de ce chapitre seront consacrés à rappeler la démonstration de ce théorème, en y apportant quelques perfectionnements.

Corollaire de la Prop. VI. Soit $A \rightarrow P_A$ un champ taylorien continu (c'est à dire une application continue de $F \subset K$ dans l'espace des polynômes à valeurs dans $\mathfrak{B}$), du μ ème ordre, avec $\mu > m$. Supposons que la condition

$$\|P_A(M) - P_B(M)\| \leq \{\|\vec{AB}\| + \|\vec{AM}\|\}^m \alpha(\|\vec{AM}\|)$$

soit vérifiée pour A et $B \in F$ et $M \in K_1$ (où $K \cap K_1 = \emptyset$).

Soit $\tilde{P}_A$ le polynôme du même degré, obtenu en supprimant dans le développement au point A de P_A , les monômes de degré $> m$. Alors $A \rightarrow \tilde{P}_A$ est un champ W -taylorien d'ordre m .

D'après la Proposition VI on doit montrer qu'il existe un module de continuité β tel que

$$\|\tilde{P}_A(M) - \tilde{P}_B(M)\| \leq \{\|\vec{AB}\| + \|\vec{AM}\|\}^m \beta(\|\vec{AM}\|)$$

pour $A \in F$, $B \in F$ et $M \in K_1$.

Il suffit pour cela de vérifier que chacun des monômes supprimés vérifie une inégalité analogue.

Posant $L_A^k = D_A^k P_A$, majorons :

$$\begin{aligned} \|L_A^k[\odot \vec{AM}] - L_B^k[\odot \vec{BM}]\| &\leq \|L_A^k[\odot \vec{AM}] - L_B^k[\odot \vec{AM}]\| \\ &+ \|L_B^k[\odot \vec{AM}] - L_B^k[\odot \vec{BM}]\|. \end{aligned}$$

D'une part

$$\|L_A^k[\odot \vec{AM}] - L_B^k[\odot \vec{AM}]\| \leq \|\vec{AM}\|^k \cdot \|L_A^k - L_B^k\| \leq \|\vec{AM}\|^k \beta(\|\vec{AB}\|)$$

où β est un module de continuité pour l'application continue $M \rightarrow L_M^k$

$$\|\vec{AM}\|^k \leq \|\vec{AM}\|^m \times d_1^{m-k} \leq \{\|\vec{AM}\| + \|\vec{AB}\|\}^m \cdot d_1^{m-k}$$

où d_1 est le diamètre de K_1 .

D'autre part

$$\begin{aligned} \|L_B^k[\odot \vec{AM}] - L_B^k[\odot \vec{BM}]\| &\leq \|L^k\|_F^0 \cdot \|\odot \vec{AM} - \odot \vec{BM}\|, \\ &\leq \|L_B^k\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \{\|\vec{AM}\| + \|\vec{BM}\|\}^{k-1} \leq 2 \|L^k\|_F^0 \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \{\|\vec{AM}\| + \|\vec{AB}\|\}^{k-1}. \end{aligned}$$

Comme $k-1 \geq m$ ceci est majoré par

$$2 \|L^k\|_F^0 \times (2d_1)^{k-1-m} \{\|\vec{AM}\| + \|\vec{AB}\|\}^m \cdot \|\vec{AB}\|.$$

C'est une majoration du type voulu, avec un module de continuité qui est un multiple de α .

12. Le théorème de prolongement.

Nous nous proposons de rappeler les articulations de la démonstration. Pour certaines parties "techniques" nous nous contentons de renvoyer à la démonstration originale (Whitney [1] et [2]), ou à l'élaboration qu'en a donnée Hestenes [1]. (M. N. Bourbaki a bien voulu communiquer un manuscrit inédit où se trouvent d'autres perfectionnements).

Mais nous développons le calcul final en détails de manière à pouvoir démontrer quelques résultats nouveaux, que l'emploi de la notion de m -module de continuité permet d'établir.

Théorème. Tout champ W -taylorien d'ordre $m \{ \dot{f} \}$ peut se prolonger à R^n , en une fonction $\hat{f}$ m -fois continûment dérivable, en sorte que les $D_M^k \hat{f}$ concordent sur F , avec les $D_M^k \dot{f}$ donnés. $\hat{f}$ peut être choisi indéfiniment dérivable (et même analytique comme l'a par ailleurs montré M. Whitney) sur le complémentaire O de F .

Le démonstration procède en trois étapes.

A) Construction du recouvrement standard.

Pour tout point M du complémentaire O de F , nous désignons par d_M la distance de M à F . λ étant un nombre positif $0 \leq \lambda \leq 1$; nous

appellerons λ -boule de centre $A \in O$ la boule de centre A et de rayon $\lambda \cdot d_A$.

Énonçons sans démonstration le lemme:

Lemme 1. Étant donnés trois nombres positifs λ, μ, ρ ($0 < \mu < \lambda$), il existe un recouvrement $\mathfrak{R}$ de O , dit "recouvrement standard" satisfaisant aux trois conditions suivantes:

1°) Il est formé de λ -boules B_i (dont les centres sont notés C_i) (l'ensemble dénombrable des indices i sera appelé I).

2°) L'ensemble des μ -boules de centre C_i est encore un recouvrement de O (cette condition n'est utilisée que dans la seconde étape de la démonstration).

3°) Il existe un entier N , ne dépendant que de μ, λ, ρ et de la dimension n de R^n , tel que toute ρ -boule centrée dans O ne rencontre que N boules B_i au plus.

Pour chaque C_i nous nous donnons un point A_i de F tel que $\|A_i C_i\| = d_{C_i}$. Le point A_i sera appelé "la projection standard" de C_i (ou B_i).

A tout point $M \in O$ correspondent au plus N_0 λ -boules $\in \mathfrak{R}$, qui le contiennent. (Ce N_0 est le N de la condition 3° correspondant à $\rho = 0$). Nous appellerons $\beta(M)$, l'ensemble fini formé des projections standard de ces λ -boules. (Si $M \in F$, nous poserons $\beta(M) = M$).

L'usage élémentaire et répété de l'inégalité du triangle permet d'établir le

Lemme 2. Il existe deux constantes h et h' indépendantes de la forme de F , telles que le diamètre de $\beta(M)$ soit majoré par $h \cdot d_M$, et que la distance de M à tout point de $\beta(M)$ soit majorée par $h' \cdot d_M$.

(On trouve $h' = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$ et $h = 2h'$).

B. La partition de l'unité standard.

Lemme 3. Il existe une partition de l'unité u_i subordonnée à $\mathfrak{R}$ (cf. BTG Chap. IX §4), formée de fonctions indéfiniment dérivables, et une constante C telle que

$$(12.1) \quad \sum_{i \in I} u_i(M) = 1.$$

$$(12.2) \quad \sum_{i \in I} D_M^k u_i = 0.$$

$$(12.3) \quad \|D_M^k u_i\| \leq \frac{C}{(d_M)^k} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq m+1.$$

(Cette constante C ne dépend que de n, m, λ, μ et ρ).

C. Le prolongement.

On pose :

$$(12.4) \quad \begin{cases} \hat{f}(M) = \dot{f}(M) & \text{sur } F \\ \hat{f}(M) = \sum_{i \in I} T_{A_i} \dot{f}(M) \cdot u_i(M) & \text{sur } O. \end{cases}$$

La somme ci-dessus est finie en chaque point M (elle comprend au plus N_0 termes non nuls). $\hat{f}$ est indéfiniment dérivable sur O . Nous allons montrer que $\hat{f}$ ainsi construit répond à la question.

Proposition VII. Les $D^k \hat{f}$ varient continûment sur K .

Soit M un point de O et A un point de $\beta(M)$.

Calculons d'abord $\hat{f}(M) - T_A f(M)$. Grâce à (12.1), on peut écrire

$$(12.5) \quad \begin{aligned} \hat{f}(M) - T_A \dot{f}(M) &= \left\| \sum_{i \in I} (T_{A_i} f(M) - T_A f(M)) \cdot u_i(M) \right\| \\ &\leq N_0 \{ \|\vec{A_i A}\| + \|\vec{A M}\| \}^m \cdot \alpha(\|\vec{A A_i}\|) \leq K \cdot (d_M)^m \cdot \alpha(d_M) \end{aligned}$$

où K est une constante ne dépendant que de N , et de h et h' (Lemme 2). Nous avons utilisé ici la Proposition VI, (1.7) et le Lemme 2. Soit alors B un point de F , et M un point de O tendant vers B , enfin A un point de $\beta(M)$.

En écrivant

$$\hat{f}(M) - T_B \dot{f}(M) = \hat{f}(M) - T_A \dot{f}(M) + T_A \dot{f}(M) - T_B \dot{f}(M)$$

on constate que $\hat{f}(M)$ tend vers

$$T_B \dot{f}(B) = \dot{f}(B) = \hat{f}(B),$$

lorsque M tend vers B . La continuité de $\hat{f}(M)$ en tout point de F , est donc établie. Comme cette continuité est évidente, en tout point de O , la continuité de $\hat{f}(M)$ sur R^n s'ensuit.

Calculons maintenant :

$$D_M^k \hat{f} = \sum_{i \in I} \sum_{p=0}^{p=k} \binom{k}{p} D_M^p u_i \odot T_{A_i}^{k-p} \dot{f}(M)$$

puis

$$D_M^k \hat{f} - T_A^k \hat{f}(M) = \sum_{i \in I} \sum_{p=0}^{p=k} \binom{k}{p} D_M^p u_i \odot \{T_{A_i}^{k-p} \hat{f}(M) - T_A^{k-p} \hat{f}(M)\}.$$

Pour justifier cette dernière formule, remarquons que (12.2) permet d'insérer les termes $T_A^{k-p} \hat{f}(M)$ dans les accolades, pour $p \neq 0$, sans modifier le résultat.

$$\begin{aligned} & \|D_M^k \hat{f} - T_A^k \hat{f}(M)\| \\ & \leq \sum_{i \in I} \sum_{p=0}^{p=k} \binom{k}{p} \cdot \frac{C}{(d_M)^p} \cdot \{\|\vec{A}A_i\| + \|\vec{A}M\|^{m-k+p} \cdot \alpha(\|\vec{A}A_i\|)\}. \end{aligned}$$

D'où l'existence d'une constante (que nous appellerons encore K), et ne dépendant que de n, λ, μ, ρ , mais non de la forme de F , telle que

$$(12.6) \quad \|D_M^k \hat{f} - T_A^k \hat{f}(M)\| \leq K \cdot d_M^{m-k} \cdot \alpha(\|d_M\|).$$

La continuité de $D_M^k \hat{f}$ s'établit alors comme celle de $\hat{f}(M)$.

Conclusion. Nous allons en déduire alors que $\hat{f}(M)$ est m -fois continûment dérivable.

Or chaque $D_M^k \hat{f}$ est dérivable, et admet $D_M^{k+1} \hat{f}$ pour dérivée; ($0 \leq k < m$). Pour $M \in O$, c'est évident.

Pour $M \in F$, cela résulte des majorations de $D_N^k \hat{f} - D_M^k \hat{f} - D_M^{k+1} \hat{f}[\vec{MN}]$ que l'on déduit immédiatement de W) ou de (12.6) suivant que N appartient, ou n'appartient pas à F .

Chaque $D_M^k \hat{f}$ est donc dérivable et admet une dérivée continue $D_M^{k+1} \hat{f}$ sur R^n . D'après la définition, $\hat{f}$ est donc m -fois continûment dérivable. Comme il prolonge effectivement le champ W -taylorien $\{\hat{f}\}$, le théorème de Whitney est établi.

13. Majoration du prolongement.

Posons, comme pour une fonction m -fois continûment dérivable

$$\|\hat{f}\|_F^m = \max_k (\max_M \|D_M^k \hat{f}\|)$$

pour $k = 0, 1, \dots, m$ et $M \in F$. La formule (10.3) reste évidemment valable pour les W -champs tayloriens d'ordre m .

$\hat{f}(M)$ se majore immédiatement, compte tenu de (12.4) et (10.3)

$$(13.1) \quad \|\hat{f}\|_K^\circ \leq \|\hat{f}\|_F^m \cdot e^d.$$

La formule (12.6) fournit de même une majoration de $D_M^k \hat{f}$

$$(13.2) \quad \|D^k \hat{f}\|_K^\circ \leq \|\dot{f}\|_F^m \cdot e^d + K \cdot d^{m-k} \cdot \alpha(d).$$

Ces deux majorations sont essentiellement distinctes de celles qu'a indiquées M. Whitney [2], [4]. Cet auteur fait des hypothèses de "régularité" (cf. Chap. III) sur les ensembles fermés F et obtient une majoration de $\|\hat{f}\|_K^m$ en fonction de $\|\dot{f}\|_F^m$.

Nos majorations ne nécessitent aucune hypothèse sur la forme de F . Le seul élément géométrique est le diamètre d de K . Mais nous faisons intervenir des propriétés supplémentaires du champ W -taylorien prolongé: le maximum de son m -module de continuité $\alpha(d)$. (Nous reviendrons sur cette question au Chap. III).

La fonction $\hat{f}$ est indéfiniment dérivable dans O . On peut alors calculer sa dérivée $m+1$ ème en tout point de O , et lui appliquer le raisonnement qui aboutit à (12.6). Mais on notera que $T_M^{m+1} f = 0$ (la dérivée $m+1$ ème d'un polynôme du même degré est nulle). Il vient alors

$$D_M^{m+1} \hat{f} = \sum_{i \in I} \sum_{p=1}^{p=m} \binom{m+1}{p} D_M^p u_i \odot \{T_{A_i}^{m+1-p} \dot{f}(M) - T_A^{m+1-p} \dot{f}(M)\}$$

et finalement :

$$(13.3) \quad \|D_M^{m+1} \hat{f}\| \leq \frac{K}{d_m} \cdot \alpha(d_M).^{(8)}$$

14. Calcul d'un m -module de continuité du prolongement.

Soient M et N deux points de K . Pour évaluer un module de continuité de $D^m \hat{f}$ (cf. Prop. 1) nous distinguerons trois cas.

1) M et N sont tous deux dans F . Alors, par hypothèse :

$$(14.1) \quad \|D_M^m \hat{f} - D_N^m \hat{f}\| = \|D_M^m \dot{f} - D_N^m \dot{f}\| \leq \alpha(|\vec{MN}|).$$

2) Supposons que M et N soient dans O . Appelant M le plus éloigné de F des deux points ($d_M \geq d_N$). Supposons en outre que N soit situé dans la λ -boule de centre M : $|\vec{MN}| \leq \lambda \cdot d_M$.

8. Plus généralement il existe une suite de constantes K_h , telle que

$$D_M^{m+h} \hat{f} \leq \frac{K_h}{(d_M)^h} \cdot \alpha(d_M).$$

On le vérifie immédiatement, en substituant toutefois à la formule (12.3), une formule

$$(12.3 \text{ bis}) \quad \|D_M^k u_2\| \leq \frac{C_k}{(d_M)^k} \quad k=0, 1, \dots, m, m+1, \dots \text{ etc}$$

Le segment MN est alors entièrement dans la dite λ -boule. Appliquons le théorème des accroissements finis à l'application $M \rightarrow D_M^m \hat{f}$ (sous la forme de la Prop. 4 de B. Fonc. Var. réelle, Chap. I § 2)

$$\|D_M^m \hat{f} - D_N^m \hat{f}\| \leq \|\vec{MN}\| \cdot \max_{P \in MN} (\|D_P^{m+1} \hat{f}\|).$$

Nous allons maintenant utiliser (13.3). Pour tout point P de MN

$$(1 + \lambda) d_M \geq d_P \geq (1 - \lambda) d_M.$$

Les formules (1.6) et (1.7) donnent alors

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(d_P)}{d_P} &\leq \frac{\alpha((1 - \lambda) d_M)}{(1 - \lambda) d_M} \leq \frac{\alpha(d_M)}{(1 - \lambda) d_M} \leq \frac{\alpha(\|\vec{MN}\|)}{\|\vec{MN}\| \cdot (1 - \lambda)} \\ \|D_M^m \hat{f} - D_N^m \hat{f}\| &\leq \|\vec{MN}\| \cdot K \cdot \max_{P \in MN} \left(\frac{\alpha(d_P)}{d_P} \right) \\ (14.2) \quad \|D_M^m \hat{f} - D_N^m \hat{f}\| &\leq \frac{K \cdot \alpha(\|\vec{MN}\|)}{1 - \lambda}. \end{aligned}$$

3) En troisième lieu supposons que M soit dans O , et que N , plus rapproché de F que M , ne soit pas dans la λ -boule de centre M (en particulier N peut être dans F).

Soit alors A un point de $\beta(M)$, et A' un point de $\beta(N)$.

$$\|D_M^m \hat{f} - D_N^m \hat{f}\| \leq \|D_M^m \hat{f} - D_A^m \hat{f}\| + \|D_A^m \hat{f} - D_{A'}^m \hat{f}\| + \|D_{A'}^m \hat{f} - D_N^m \hat{f}\|.$$

Notons que $L_A^m f = T_A^m f$, car $T_A f(M)$ est un polynôme du même degré. D'après (12.6)

$$\|D_M^m \hat{f} - D_N^m \hat{f}\| \leq K \cdot \alpha(d_M) + \alpha(\|\vec{AA'}\|) + K \cdot \alpha(d_N).$$

Or
$$\|AA'\| \leq \|\vec{MN}\| + d_M + d_N.$$

D'après (1.3), la croissance de α et (1.7)

$$(14.3) \quad \|D_M^m \hat{f} - D_N^m \hat{f}\| \leq (2K + 2) \cdot \alpha(d_M) + \alpha(\|\vec{MN}\|) \leq \left(\frac{2K + 2}{\lambda} + 1 \right) \alpha(\|\vec{MN}\|).$$

Soit alors Γ le maximum de 1, $K/(1 - \lambda)$ et $\left(\frac{2K + 2}{\lambda} + 1 \right)$. Quels que soient M et N dans le pavé K , on a

$$(14.4) \quad \|D_M^m \hat{f} - D_N^m \hat{f}\| \leq \Gamma \cdot \alpha(\|\vec{MN}\|).$$

La constante Γ peut se majorer en fonction de $m, n, d; \lambda, \mu, \rho$. Or λ, μ, ρ sont des constantes dont nous pouvons disposer à notre gré et l'on pourrait se proposer de les déterminer de façon à donner à Γ la plus

petite valeur possible. Cette valeur extrême ne dépend que de m, n, d .

Nous pouvons donc énoncer.

Proposition VII. Il existe une constante Γ ne dépendant que de n, m et d telle que tout champ W -taylorien d'ordre m défini sur F , puisse être prolongé à K , en une fonction m -fois continûment dérivable dont le m -module de continuité est $\Gamma \cdot \alpha$, où α est un m -module de $\dot{f}$.

Le cas $m=0$ (pour F et K métriques quelconques) a déjà été donné par M. MacShane ([1]).

Remarque. Il est essentiel dans l'énoncé de la Prop. VII de supposer que α est un m -module de continuité concave (conformément à la Définition 1) (mais en contradiction avec l'usage).

Cette proposition serait fausse dans le cas contraire.

Par exemple, il existe dans le plan R^2 , des courbes "critiques" (cf. Chap. II) sur lesquelles existe une fonction non constante satisfaisant à

$$|f(M) - f(N)| \leq \|\vec{MN}\|^{3/2}.$$

Mais sur un pavé compact, une fonction satisfaisant à

a en tout point une dérivée nulle. Elle est par suite constante. $\hat{f}$ ne saurait par conséquent prolonger $\{\dot{f}\}$.

15. Deux méthodes pour construire des champs W -tayloriens d'ordre m .

Soient f et g deux fonctions m -fois continûment dérivables, définies sur K , à valeurs dans une algèbre. Le produit $h = f \cdot g$ est m -fois continûment dérivable.

Lorsqu'on passe de la notion de fonction, à la notion de champ W -taylorien, il se produit un phénomène intéressant: il est possible d'obtenir des champs W -tayloriens, en "multipliant" des éléments dont l'ordre de dérivabilité est moindre.

Définition. Une fonction f définie sur K sera dite de type (λ, m) par rapport au compact F , si elle est m -fois continûment dérivable, et si ses dérivées d'ordre $0 \leq k \leq \lambda - 1$ s'annulent sur F .

Proposition VIII. Étant données deux fonctions (ou deux

W -champs) f et g de type respectifs (λ, m) et (λ', m') , il existe un W -champ h de type $(\lambda + \lambda', m'')$ (ou $m'' = \text{Min}(m + \lambda', m' + \lambda)$) dont le polynôme de Taylor en chaque point de F s'obtient à partir du produit $T_A f(M) \cdot T_A g(M)$ en supprimant tous les termes de degré $> m''$.

D'après le corollaire de la Proposition VI pour établir la Proposition VIII, il suffit de trouver une majoration analogue pour

$$(15.1) \quad T_A \dot{f}(M) \cdot T_A \dot{g}(M) - T_B \dot{f}(M) \cdot T_B \dot{g}(M) = T_A \dot{f}(M) \{T_A \dot{g}(M) - T_B \dot{g}(M)\} \\ + T_B \dot{g}(M) \{T_A \dot{f}(M) - T_B \dot{f}(M)\}.$$

Comme par hypothèse f est du type (λ, m) , le terme de plus bas degré de $T_A \dot{f}(M)$ est du λ -ième degré. On en déduit d'après la formule (10.3 bis)

$$\|T_A \dot{f}(M)\| \leq \|AM\|^\lambda \cdot \|f\|_F^m \cdot e^{d_1} \quad (A \in F, M \in K_1).$$

La première moitié de la différence (15.1), admet donc une majoration par une expression de la forme

$$(15.2) \quad K \cdot \|AM\|^\lambda \cdot \{\|AM\| + \|AB\|\}^{m'} \cdot \alpha_g(\|AB\|) \\ \leq K \{\|AM\| + \|AB\|\}^{m''} \cdot \alpha(\|AB\|).$$

De même pour la seconde différence. La proposition est établie.

Remarque. Voici la règle, pour calculer les dérivées de $\{h\}$. On écrit formellement la formule de Leibniz pour le calcul des dérivées (jusqu'à l'ordre m'' ème) de $f \cdot g$. On constate alors qu'il y figure des dérivées dont l'existence n'est pas assurée. Mais une telle dérivée est alors obligatoirement associée à une dérivée de l'autre facteur, qui est nulle par hypothèse. Si l'on convient qu'un produit d'une dérivée nulle par une dérivée qui n'a pas de sens est nulle, la formule de Leibniz reste valable.

Application à la construction d'un contre-exemple. Il s'agit d'illustrer la Remarque 2° précédant la Prop. VI.

Soit $f(x)$ une fonction numérique 1-fois continûment dérivable définie sur un intervalle compact de R . Prenons comme fermé F de R^2 , le graphe de f , et considérons la fonction de type (1.1) $G(x, y) = y - f(x)$.

Par hypothèse

$$|y - y_1 - (x - x_1) \frac{df}{dx}(x_1)| \leq |x - x_1| \cdot \alpha(|x - x_1|),$$

où α est un 1-module de continuité de f .

Construisons maintenant le champ W -taylorien $H(x, y)$ type (m, m) , obtenu en "multipliant" m -fois par lui-même l'élément $G(x, y)$ conformément à la Proposition VIII.

Seules les dérivées partielles d'ordre total m , de $\dot{H}$ ne sont pas nulles. Elles valent :

$$\frac{\partial^m \dot{H}}{\partial^k x \cdot \partial^{m-k} y} = (-1)^k \left(\frac{df}{dx} \right)^k.$$

Calculons maintenant $|\dot{H}(M) - T_{M_1} \dot{H}(M)|$.

On trouve

$$|y - y_1 - (x - x_1) \frac{df}{dx}(x_1)|^m \leq |x - x_1|^m \cdot |\alpha(|x - x_1|)|^m.$$

On peut disposer de la fonction f , et de l'entier m , de façon que la puissance même de $\alpha(x)$ soit majorée par x^r (où r est un entier > 1). La seule première formule (W) pourrait alors nous inciter à croire que $\dot{H}(x, y)$ est un champ W -taylorien d'ordre $m + r$.

Mais s'il en était ainsi, la dérivée partielle $\frac{\partial^m \dot{H}}{\partial x \cdot \partial^{m-1} y} = \frac{-df}{dx}$

devrait être une fonction 1-fois continûment dérivable sur la courbe d'équation $y = f(x)$, qui est continûment dérivable.

Ce qui n'a pas lieu en général.

Nous allons maintenant donner une proposition analogue concernant les fonctions composées.

Proposition IX. Soit f un élément de type (λ, m) défini sur $F_1 \subset K_1$. Soit $M \rightarrow M_1 = \vartheta(M)$ une application μ -fois continûment dérivable appliquant K dans K_1 et $F \subset K$ dans F_1 . Il existe alors un champ W -taylorien d'ordre m défini sur F , dont le polynôme de Taylor en chaque point A de F se déduit du polynôme composé $T_{A_1} \dot{f}(T_A \vartheta(M))$ par suppression des termes de degré $> m$, pourvu que $\mu + \lambda - 1 \geq m$.

Pour abréger l'écriture, nous poserons $M_A = T_A \vartheta(M)$. On a

$$-A_1 \vec{M}_A = \vartheta(A) - T_A \vartheta(M) = T_A \vartheta(A) - T_A \vartheta(M).$$

Appliquant (2.2)

$$\|A_1 \vec{M}_A\| \leq \|\vec{AM}\| \cdot \|T_A^1 \vartheta\| \leq \|\vec{AM}\| \cdot e^d \cdot \|\vartheta\|_K^\mu.$$

Ce qui entraîne

$$(15.4) \quad \|\vec{A_1 M_A}\| \leq \{\|AB\| + \|AM\|\} \cdot \|\vartheta\|_K^\mu \cdot e^d.$$

Par ailleurs

$$(15.5) \quad \|\vec{M_A M_B}\| = \|T_B \vartheta(M) - T_A \vartheta(M)\| \leq \{\|AB\| + \|AM\|\}^\mu \alpha(\|AB\|).$$

Ceci posé, d'après le corollaire de la Proposition VI, il suffit de trouver une majoration convenable pour $T_{A_1} \dot{f}(M_A) - T_{B_1} \dot{f}(M_B)$ pour établir la proposition.

Cette différence étant la somme de $T_{A_1} \dot{f}(M_A) - T_{A_1} \dot{f}(M_B)$ et de $T_{A_1} \dot{f}(M_B) - T_{B_1} \dot{f}(M_B)$, nous majorerons séparément ces deux termes.

$$\|T_{A_1} \dot{f}(M_B) - T_{B_1} \dot{f}(M_B)\| \leq \{\|\vec{A_1 B_1}\| + \|\vec{B_1 M_B}\|\}^m \alpha(\|\vec{A_1 B_1}\|).$$

Comme

$$\|\vec{A_1 B_1}\| \leq \|AB\| \cdot \|\vartheta\|_K^m \cdot e^d \quad \text{et} \quad \|\vec{B_1 M_B}\| \leq \|\vec{B M}\| \cdot \|\vartheta\|_K^m \cdot e^d$$

on en déduit l'existence d'un module de continuité β tel que

$$\|T_{A_1} \dot{f}(M_B) - T_{B_1} \dot{f}(M_B)\| \leq \|\vec{A B}\| + \|\vec{B M}\| \cdot \|\vartheta\|_K^m \cdot \beta(\|\vec{A B}\|).$$

Pour majorer $\|T_{A_1} \dot{f}(M_A) - T_{A_1} \dot{f}(M_B)\|$ nous commencerons par utiliser (4.3)

$$\begin{aligned} \|T_{A_1} \dot{f}(M_A) - T_{A_1} \dot{f}(M_B)\| &= \left\| \sum \frac{1}{k!} \cdot T_{A_1}^k \dot{f}(M_A) [\odot^k M_A M_B] \right\| \\ &\leq \sum \frac{1}{k!} \cdot \|T_{A_1}^k \dot{f}(M_A)\| \cdot \|\vec{M_A M_B}\|^k. \end{aligned}$$

Nous distinguerons alors, pour majorer $T_{A_1}^k \dot{f}(M_A)$, deux cas suivant que $k < \lambda$ ou non.

Si $k < \lambda$ le polynôme $T_{A_1}^k f$ commence par un terme du $\lambda - k$ ème degré.

D'où

$$\|T_{A_1}^k \dot{f}(M_A)\| < \|\vec{A_1 M_A}\|^{\lambda-k} \cdot \|f\|_K^m \cdot e^d$$

d'après (10.3 bis) et d'après (15.4) et (15.5)

$$\|T_{A_1}^k \dot{f}(M_A)\| \cdot \|\vec{M_A M_B}\|^k \leq \{\|\vec{A B}\| + \|\vec{A M}\|\}^{\mu k + \lambda - k} \cdot (\alpha(\|\vec{A B}\|))^k \cdot K$$

(où K est une constante facile à expliciter).

Remarquons que l'exposant $\mu k + \lambda - k = k(\mu - 1) + \lambda \geq \mu - 1 + \lambda \geq m$ (car k ne prend que des valeurs > 1 , dans la somme que nous étudions). On en déduit lorsque $k < \lambda$ la majoration cherchée de la forme

$$\|T_{A_1}^k \dot{f}(M_A)\| \cdot \|\vec{M_A M_B}\|^k \leq \{\|\vec{A B}\| + \|\vec{B M}\|\}^m \cdot \beta(\|\vec{A B}\|).$$

Enfin si $k \geq \lambda$ on peut majorer

$$\|\vec{M}_A \vec{M}_B\|^k \leq \|\vec{M}_A \vec{M}_B\|^\lambda \quad \text{dès que} \quad \|M_A M_B\| \leq 1.$$

Compte tenu de (15.5) on trouve

$$\|\vec{M}_A \vec{M}_B\|^k \leq \{\|\vec{A}\vec{B}\| + \|\vec{A}\vec{M}\|\}^{\mu\lambda} \cdot (\alpha(\vec{A}\vec{B}))^k$$

ce qui est bien une majoration du type cherché, si l'on remarque que $\mu\lambda \geq \mu + \lambda - 1 \geq m$ dès que μ et λ sont > 1 .

Remarque. Si l'on voulait calculer les dérivées du W -champ "composé" obtenu dans la Proposition IX, à l'aide de la formule (9.5), on verrait apparaître des termes $T_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q}$ qui seraient dépourvus de sens si ϑ n'est supposé que μ -fois continûment dérivable. Mais ils s'inséreraient dans un symbole $D_{A_1}^p f$ qui serait nul par hypothèse. Il s'ensuit que la formule (9.5) reste valable, si l'on convient qu'une fonction composée d'un élément non défini, par un élément nul, est nulle.

CHAPITRE II

1. Questions de géométrie infinitésimale directe.

Étant donné un compact $F \subset K$, nous nous proposons d'étudier ses "propriétés de classe $\mathfrak{G}^m$ ". Ce sont les propriétés de F , qui sont invariantes par le groupe des homéomorphismes m -fois continûment dérivables de K .

En particulier, toutes les propriétés qui résultent de la possibilité (ou de l'impossibilité) d'immerger un voisinage de $A \in F$, dans une variété k -fois continûment dérivable ($k \leq m$), à p dimensions, et située dans R^n sont des propriétés de classe $\mathfrak{G}^m$.

Définition 1. Une immersion de classe $\mathfrak{G}^m$ de F est une variété m -fois continûment dérivable contenant F .

Une immersion locale en A , est une immersion d'un voisinage de A .

Une immersion minimale est une immersion dans une variété de dimension minimum.

On définit de même une immersion locale en A minimale.

La terminologie ci-dessus réalise un abus de langage par rapport à la terminologie usuelle: On appelle d'ordinaire "immersion" l'objet constitué par une variété V et une application de F dans V . Dans notre étude V

sera toujours dans R^n et l'application d'immersion sera toujours l'application canonique: nous la sous-entendrons donc.

Par ailleurs la notion d'immersion concerne plutôt des germes de variétés; deux variétés identiques dans un voisinage de F devraient être identifiées. Dans notre étude, il n'y a pas lieu d'insister sur cette nuance.

Il existe un certain lien entre les propriétés de classe $\mathfrak{G}^m$, et les propriétés du paratingent (en abrégé ptg) (cf. Bouligand [1]). Mais ce lien est moins étroit qu'il semblerait: l'Exemple V de ce chapitre consiste en un compact F de R^3 , ayant en chaque point un ptg contenu dans un plan, et cependant aucune immersion locale de classe $\mathfrak{G}^1$ à 2 dimensions n'est possible. Ceci montre que le ptg est inadapté, sous sa forme usuelle à l'étude des propriétés de classe $\mathfrak{G}^m$.

Pour suppléer à cette carence, nous introduisons et utilisons une nouvelle notion: le paratingent linéarisé d'ordre m (ptgl^m), dont nous allons entreprendre l'étude.

2. Champs de gerbes de droites.

Soit E' un espace auxiliaire de dimension finie (qui sera souvent l'espace R^n lui-même, ou une de ses puissances tensorielles symétriques). Nous désignons par $\mathfrak{G}_p(E')$ la grassmanienne $p^{\text{ème}}$ de E' ; c'est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension p de E' , muni de sa structure usuelle de variété compacte.

Une gerbe de droites est une partie fermée de $\mathfrak{G}_1(E')$.

Un champ de gerbes de droites défini sur F est une application $M \rightarrow G(M)$ de F dans l'ensemble des gerbes de droites.

L'ensemble des gerbes de droites sera muni d'une structure d'ordre: l'inclusion, et d'une topologie: la topologie usuelle de Hausdorff sur l'ensemble des parties fermées d'un espace compact (ici l'ensemble des parties fermées de $\mathfrak{G}_1(E')$. (BTG Chap. IX § 2 Exerc. 7).

(2.1) On dit qu'une droite D appartient à $\limsup G(A)$ s'il existe une suite de points A_i de F tendant vers A telle que D soit limite d'une suite de droites $D_i \in G(A_i)$.

On dit qu'une droite D appartient à $\liminf G(A)$ si pour toute suite de points $A_i \in F$, tendant vers A , il existe une suite de droites $D_i \in G(A_i)$ tendant vers D .

- (2.2) Un champ de gerbes de droites possède la semi-continuité supérieure (resp. inférieure) d'inclusion, au point A , si

$$\limsup G(A) = G(A) \quad (\text{resp.} \quad \liminf G(A) = G(A))$$

(cf. Bouligand [1] et Choquet [3]).

- (2.3) Étant donnée une gerbe de droites G , située dans un espace E' muni d'une structure euclidienne, on appelle coefficient d'indépendance linéaire $g_m(G)$ de m droites de G , le maximum du volume m -dimensionnel des m -parallélotopes construits sur m vecteurs unitaires portés par des droites de G . $G \rightarrow g_m(G)$ est une fonction continue sur l'espace des gerbes de droites.

Si un champ de gerbes de droites possède la semi-continuité supérieure (resp. inférieure) d'inclusion, la fonction

$$M \rightarrow g_m(M) = g_m(G(M))$$

possède la semi-continuité supérieure (resp. inférieure). (Vérification immédiate.)

- (2.4) Étant donnée une gerbe de droites G , on notera $L(G)$ la gerbe des droites situées dans le sous-espace linéaire de E' engendré par G . On désignera par $d(G)$ la dimension de ce sous-espace linéaire. La relation $g_m(G) = 0$ équivaut à $d(G) < m$.

- (2.5) Si un champ de gerbes satisfait à la semi-continuité inférieure d'inclusion, la fonction numérique à valeurs entières $M \rightarrow d(M) = d(G(M))$ est semi-continue inférieurement.

Par contre la semi-continuité supérieure d'inclusion du champ $M \rightarrow G(M)$ n'implique pas la semi-continuité supérieure de $M \rightarrow d(M)$: cela se produit lorsque $g_m(A)$ est nul, sans que $g_m(M)$ s'annule identiquement au voisinage de A .

3. Champs d'éléments de contact.

Un élément de contact est une gerbe de droites formée de toutes les droites d'un sous-espace vectoriel de E' . L'ensemble de tous les éléments de contact est un sous-espace fermé de l'espace des gerbes de droites, homéomorphe à la somme topologique des grassmaniennes $\mathcal{G}_p(E')$. Les champs d'éléments de contact sont donc des champs de gerbes particuliers; ils possèdent des propriétés spéciales:

Proposition I. Si un champ d'éléments de contact pos-

sède la semi-continuité (supérieure ou inférieure, au choix) d'inclusion, et si la dimension des éléments de contact de ce champ reste constante (égale à k), alors le champ possède la continuité d'inclusion.

Il s'agit de vérifier qu'une certaine application de F dans $\mathcal{G}_k(E')$ est continue: c'est une conséquence immédiate, par exemple, du critère du graphe fermé (B TG Chap. I § 10, exerc. 12).

Proposition II. Si un champ d'éléments du contact $M \rightarrow C(M)$ possède la semi-continuité supérieure d'inclusion, alors la fonction numérique $M \rightarrow d(M) = d(C(M))$ est semi-continue supérieurement. Il existe un ouvert partout dense de F , sur lequel $C(M)$ possède la continuité d'inclusion.

La première assertion résulte de ce que $g_m(M) = 1$ dès que $d(M) \geq m$, c'est à dire dès que $g_m(M) \neq 0$ (il suffit de prendre dans $C(M)$ un système de m vecteurs orthonormés). Si $d(A) = m$, $g_{m+1}(A) = 0$. Utilisant la semi-continuité supérieure de $g_{m+1}(M)$ (2.3), on en déduit l'existence d'un voisinage de A où $g_{m+1}(M) < 1$, c'est à dire où $g_{m+1}(M) = 0$. Dans ce voisinage $d(M) \leq m$, ce qui exprime le semi-continuité supérieure de la fonction $d(M)$.

L'ensemble des points où cette fonction $d(M)$ est strictement inférieure à un entier $k+1$, est un ouvert U_k . En posant $O_k = U_k - \overline{U_{k-1}}$, F apparaît comme la réunion d'un nombre fini d'ouverts O_k et d'un ensemble fermé rare. Dans chacun des O_k le champ $C(M)$ reste de dimension constante k ; d'après la Prop. I, il y varie continûment.

Remarque. Les propositions précédentes ne s'étendent pas aux champs de gerbes de droites: en particulier la Proposition II ne peut être remplacée que par le théorème suivant (cf. Choquet [3] p. 94):

(3.1) "L'ensemble des points de continuité d'un champ de gerbes possédant la semi-continuité supérieure d'inclusion est un résiduel (complémentaire d'un ensemble maigre)".

(3.2) L'application L de l'espace des gerbes de droites dans l'espace des éléments de contact transforme un champ qui possède la semi-continuité inférieure d'inclusion, en un champ de même nature.

Il n'en est plus de même pour la semi-continuité supérieure.

Il suffit pour le voir d'invoquer l'exemple qui a servi en (2.5).

4. Agrandissement d'un champ d'éléments de contact.

Étant donnés deux champs d'éléments de contact C et C' , nous écrivons $C' \supset C$ pour exprimer qu'en chaque point $M \in F$, $C'(M) \supset C(M)$. Agrandir un champ d'éléments de contact $C(M)$, c'est lui substituer un champ C' tel que $C' \supset C$:

Proposition III. Soit C un champ d'éléments de contact possédant la semi-continuité supérieure d'inclusion, et tel que $d(M) < n'$ (dimension de E'). Il est possible au voisinage de chaque point $A \in F$ d'agrandir C en un champ continu C' d'éléments de contact de dimension $n' - 1$.⁽⁹⁾ Nous distinguerons trois cas:

1°) Supposons d'abord qu'au voisinage de A , la fonction $d(M)$ soit constante: $d(M) = k$. Le champ $C(M)$ est donc continu au voisinage de A (Prop. I). Il existe un système de $n' - 1 - k$ droites, linéairement indépendantes, et engendrant un sous-espace transversal à $C(A)$. Ce système de droites reste encore transversal aux $C(M)$, où M décrit un voisinage suffisamment petit de A . Le champ de gerbes constitué en chaque point par la réunion de $C(M)$ et du système de droites, varie continûment, et garde un coefficient d'indépendance linéaire $g_{n'-1}$ non nul, par construction, au voisinage de A . Le champ d'éléments de contact qu'il engendre répond alors à la question.

2°) Supposons en second lieu qu'au voisinage de A , la fonction $d(M)$ ne prenne que deux valeurs distinctes k et p , $k < p$. Soit F_p l'ensemble fermé défini par $d(M) = p$, dans un voisinage fermé V de A . $A \in F_p$. La restriction du champ C à F_p est un champ continu d'éléments de contact (Prop. I). C'est une application continue de F_p dans la grassmanienne $\mathbb{G}_p(E')$. On sait qu'il n'est pas, en général, possible de prolonger une telle application continue à tout F . Mais il résulte du théorème d'Urysohn, et du fait que $\mathbb{G}_p(E')$ est une variété, qu'il est possible de prolonger cette application à un voisinage fermé $V' \subset F$ de A , en une application continue. Nous avons ainsi construit un champ continu C' à p dimensions dans $V' \cap F$, qui coïncide avec C sur $F_p \cap V'$.

En chaque point M de $V' \cap F - V' \cap F_p$, nous disposons maintenant

9. Plus généralement, si $d(M) \leq m < m'$, il est possible au voisinage de chaque point $A \in F$ d'agrandir C en un champ continu d'éléments de contact de dimension m' .

de deux champs d'éléments de contact: $C'(M)$ à p dimensions, et $C(M)$ à k dimensions. On peut choisir V' suffisamment petit pour que $C(M)$ ne contienne aucune droite orthogonale à $C'(M)$. (Ceci se montre par l'absurde; il existerait dans l'hypothèse contraire une suite de points M_i , et en chacun de ces points une droite $D_i \in C(M_i)$ orthogonale à $C'(M_i)$. On en déduirait à la limite une contradiction avec la semi-continuité supérieure d'inclusion.)

Ceci posé, nous sommes en mesure de construire un champ $C''(M)$ d'éléments de contact à p dimensions défini sur $V' \cap F$, et agrandissant $C(M)$: sur $V' \cap F_p$ on pose $C''(M) = C(M)$. Ailleurs $C''(M)$ est la somme directe de $C(M)$ qui est à k dimensions, et du sous-espace de $C'(M)$ formé des droites orthogonales à $C(M)$: ce sous-espace est à $k - p$ dimensions (car il est identique à l'orthogonal dans $C'(M)$ de la projection orthogonale biunivoque de $C(M)$ sur $C'(M)$).

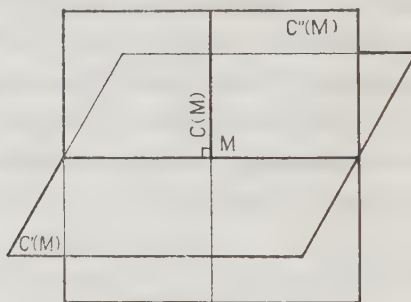


Figure 1

Ainsi nous avons bien construit en chaque point de $V' \cap F$ un champ d'éléments de contact qui agrandit C . Il est élémentaire de vérifier qu'il est continu.

3°) Cas général. Supposons que les valeurs d'adhérence distinctes de $d(M)$ au voisinage de A soient $k_0, k_1, \dots, k_m, p$.

Considérons l'ensemble F_{k_m} de F défini dans un voisinage de A par la relation $d(M) = \{k_m \text{ ou } p\}$. On peut effectuer sur F_{k_m} l'opération qui a été effectuée sur E au 2°). On dispose ainsi d'un champ C' qui agrandit C , qui est égal à C sur le complémentaire de $F_{k_m} - F_p$ et qui est à p dimensions sur F_{k_m} . Il est immédiat que ce nouveau champ possède encore la semi-continuité supérieure. Le champ C' est analogue au précédent, avec une

valeur d'adhérence (k_m) en moins pour $d(M)$, au voisinage de A . En répétant l'opération on finit par se ramener au cas où il n'y a plus qu'une valeur pour $d(M)$ au voisinage de A , et l'on achève comme au 1°).

Remarque. Il résulte de ce qui précède que l'élément de contact $C'(A)$ peut être choisi arbitrairement parmi les hyperplans de E' qui contiennent $C(A)$.

5. Le paratingent linéarisé d'ordre 1.

Lorsque l'on prend pour espace E' , l'espace $E = R^n$, il est d'usage de se représenter un champ de gerbes de droites $G(M)$ en se donnant en chaque point M une gerbe "affine" de sommet M .

Parmi les champs de gerbes de droites définis sur un fermé $F \subset R^n$, un des plus importants est le paratingent (ptg) (cf. Bouligand [1]). Rappelons que le paratingent en un point A de F est la gerbe des droites limites des droites MM' (où M et M' sont des points de F , tendant indépendamment vers A). Le ptg possède la semi-continuité supérieure d'inclusion.

Proposition IV. Considérons les champs d'éléments de contact définis sur F et possédant les deux propriétés suivantes:

a) Ils possèdent la semi-continuité supérieure d'inclusion.

b) l'élément de contact attaché au point A contient le ptg au point A de l'ensemble F .

Parmi ces champs, il en existe un, qui est le "plus petit" pour la relation $\subset$. Nous appellerons ce champ d'éléments de contact le paratingent linéarisé d'ordre 1 (ptgl¹) de F .

Il existe des champs d'éléments de contact satisfaisant à a) et b), ne serait-ce que le champ constant de dimension n . Soit $C_i(M)$ une famille de champs d'éléments de contact satisfaisant à a) et b), le champ $M \rightarrow \cap C_i(M)$ y satisfait aussi trivialement. D'où l'existence du ptgl¹.

Théorème 1. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un fermé F possède en chaque point une immersion locale de classe $\mathcal{C}^1$, à p dimensions, est qu'en chaque

point la dimension du ptgl^1 soit inférieure ou égale à p . Le $\text{ptgl}^1(A)$ est l'intersection de toutes les variétés linéaires, tangentes en A , à toutes les immersions locales en A de classe $\mathbb{G}^1$. Le $\text{ptgl}^1(A)$ est aussi la variété linéaire tangente commune à toutes les immersions locales minimales en A , de classe $\mathbb{G}^1$.

S'il existe une immersion locale à p dimension de classe $\mathbb{G}^1$, le champ des variétés linéaires tangentes satisfait évidemment à a) et b). Il agrandit donc le ptgl^1 . La condition est donc nécessaire.

Réciproquement si $d(\text{ptgl}^1(A)) = p \leq n$, on peut agrandir le ptgl^1 au voisinage de A en un champ d'éléments de contact $C(M)$ de dimension $n-1$ (Prop. III).

Il existe alors une droite D , supplémentaire de $C(A)$, qui reste d'ailleurs transversale aux $C(M)$ (en restreignant au besoin le voisinage de A choisi). Il existe alors un hyperplan H , tel que la projection de F sur H , parallèlement à D soit biunivoque, au voisinage de A . Définissons alors sur cette projection un champ W -taylorien d'ordre 1 (cf. Chap. I), en posant, pour le point m , projection de M

$$(5.1) \quad \begin{cases} \dot{f}(m) = \text{cote de } M \text{ par rapport à l'hyperplan } H \\ D_m^1 \dot{f} = \text{la forme linéaire sur } H, \text{ dont le graphe dans } H \times D \\ \text{est l'hyperplan parallèle à } C(M). \end{cases}$$

Pour prouver que nous avons là, un champ W -taylorien d'ordre 1, il convient d'établir l'existence d'un module de continuité α tel que

$$(5.2) \quad \begin{cases} |\dot{f}(m) - \dot{f}(n) - D_n^1 \dot{f} [\vec{nm}]| \leq \|\vec{nm}\| \alpha(\|\vec{nm}\|) \\ \|\dot{D}_m^1 \dot{f} - D_n^1 \dot{f}\| \leq \alpha(\|\vec{mn}\|). \end{cases}$$

Il suffit de trouver successivement deux modules de continuité pour ces deux inégalités, puis de prendre un module de continuité qui les majore.

La seconde inégalité exprime simplement la continuité du champ $C(M)$. Quant à la première, elle résulte du lemme "d'uniformité" suivant :

Lemme. Si un champ continu d'éléments de contact défini sur un compact F contient, en chaque point, le ptg de F , alors à tout nombre ε , on peut faire correspondre un nombre d , tel que $\|MN\| \leq d$ (M et $N \in F$) entraîne que la distance (angulaire) de la droite MN à la variété linéaire $C(M)$ soit inférieure à ε .

Raisonnons par l'absurde. Supposons l'existence d'une double suite de points $M_i N_i \in F$, telle que $\|M_i N_i\|$ tende vers 0, alors que la distance angulaire de $M_i N_i$ à $C(M_i)$ reste $> \varepsilon$.

Grâce à la compacité, on peut en extraire une double suite telle que M_i et N_i tendent vers un point A , et que la direction $M_i N_i$ tende vers une direction D .

D'une part $D \in \text{ptg}(A) \subset C(A)$. D'autre part on voit, par continuité que l'angle de D avec $C(A)$ est $\geq \varepsilon$. Contradiction.

Remarque. Ce lemme n'est valable que pour un champ continu. Le ptgl^1 du graphe de la fonction $y = x^2 \cdot \sin 1/x$ est un champ possédant la semi-continuité supérieure d'inclusion qui fournit un contre-exemple.

Ce lemme exprime exactement la première inégalité (5.2) à condition d'appeler "distance angulaire" de MN avec $C(M)$, non pas l'angle de MN avec la projection orthogonale de MN sur $C(M)$, mais l'angle de MN avec la projection de MN sur $C(M)$, effectuée parallèlement à D .

D'après le théorème du prolongement, le champ W -taylorien $\{\dot{f}\}$ se prolonge à H , en une fonction 1-fois continûment dérivable, dont le graphe représente une immersion locale de classe $\mathbb{G}^1$, à $n-1$ dimensions. Comme la construction du champ $C(M)$ (qui agrandit le ptgl^1) peut se faire d'au moins $n-p$ façons linéairement indépendantes (cf. remarque qui suit la Proposition III, 1°), il en résulte que F est bien immersible localement dans une variété 1-fois continûment dérivable à p dimensions. $C. Q. F. D.$

6. Paratingent et paratingent linéarisé d'ordre 1.

Nous montrerons que, partant du ptg (usuel) on peut reconstituer le ptgl^1 , en itérant les deux opérations suivantes :

a) l'opération L (cf. (2.4) et (3.2)) qui substitue à une gerbe de droites, l'élément de contact qu'elle engendre.

b) l'opération "lim sup" (2.1) qui substitue à un champ de gerbes de droites, le plus petit champ de gerbes de droites possédant la semi-continuité supérieure d'inclusion qui l'agrandit. On vérifie que ce champ s'obtient, en construisant en chaque point de F , la lim sup telle qu'elle est définie en (2.1).

Le ptg possède la semi-continuité d'inclusion, mais ce n'est pas en général un champ d'éléments de contact.

$L(\text{ptg})$ est un champ d'éléments de contact, mais ne possède pas, en général, la semi-continuité d'inclusion.

$\limsup L(\text{ptg})$ possède la semi-continuité d'inclusion, mais n'est pas en général un champ d'éléments de contact, etc..

Nous allons illustrer ces considérations à l'aide d'exemples. Le choix de ces exemples est motivé par nos besoins ultérieurs.

Exemple 1. Il existe des ensembles de R^2 , tels qu'en chacun de leurs points le ptg se réduit à deux droites de directions fixes.

Tel est l'ensemble P des points dont les coordonnées sont données comme sommes des séries suivantes :

$$x = \sum_{i=1}^{i=\infty} \varepsilon_i \frac{1}{2^{(2i)^2}}$$

$$y = \sum_{j=1}^{j=\infty} \varepsilon_j \frac{1}{2^{(2j+1)^2}}$$

où i et j sont entiers et ε_i et ε_j ne prennent que les valeurs 0 et 1.

A tout couple de fonctions $i \rightarrow \varepsilon_i$, $j \rightarrow \varepsilon_j$ définies sur l'ensemble des entiers, et ne prenant que les valeurs 0 et 1, correspond d'une façon biunivoque un point de P . Si l'on munit l'espace des $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ de la topologie de la convergence simple, on définit ainsi un homéomorphisme sur P . On en déduit que P est parfait.

Considérons une corde $M_p N_p$. Dès que $\|M_p N_p\|$ est assez petit, l'une des composantes du vecteur $\vec{M_p N_p}$ est négligeable devant l'autre. Ainsi le ptg de P en tout point est formé des parallèles aux deux axes de coordonnées. En utilisant une affinité, on peut modifier à volonté l'angle ϑ des droites du ptg.

Exemple 2. Soit maintenant P_k une suite d'ensembles analogues au précédent, de diamètre $1/k^3$, ayant un point sur l'axe Ox , à la distance $1/k$ de l'origine et dont le ptg est formé de deux directions symétriques par rapport à Ox . L'angle de ces directions, ϑ_k , tend vers 0 lorsque $k \rightarrow \infty$. L'ensemble F , réunion des P_k et du point 0, est un compact. En tout point distinct de 0, $L(\text{ptg}) = \text{ptgl}^1$ est à deux dimensions. En 0, $L(\text{ptg})$ se réduit à Ox , alors que $\limsup L(\text{ptg})$ est à deux dimensions.

Exemple 3. Soient dans R^3 , deux plans H et H' se coupant suivant Ox . Reprenons la construction de l'exemple 2, en construisant alternativement

P_k dans H ou H' . On vérifie qu'en 0, $L(\text{ptg})$ est une droite ; $\limsup L(\text{ptg})$ est la réunion des deux plans H et H' , et $L(\limsup L(\text{ptg}))$ est à trois dimensions.

Exemple 4. En opérant comme dans l'exemple 2, avec une suite d'ensembles analogues à ceux de l'exemple 3, mais correspondant à des plans H_k et H'_k dont le dièdre tend vers 0, on peut faire en sorte que trois opérations soient nécessaires pour obtenir le ptgl^1 au point 0.

On conçoit que dans R^n $n > 3$, la complication soit encore plus grande.

Dans les exemples précédents les singularités formaient un ensemble fini, (ou dénombrable). Cependant, il n'est pas vrai que l'ensemble des points où $L(\text{ptg}) = \text{ptgl}^1$ est partout dense.

Voici quelques résultats partiels dans cet ordre d'idées.

Proposition V. Si pour un champ de gerbes de droites $G(M)$, défini sur un ensemble fermé F et possédant la semi-continuité supérieure d'inclusion, la dimension de $L(G(M))$ reste constante, il existe un ouvert partout dense de F , sur lequel $L(G(M))$ varie continûment. En particulier, si $d(\text{ptg}(M))$ reste constant sur F , alors $L(\text{ptg})$ et ptgl^1 coïncident sur un ouvert partout dense de F .

Soit m la dimension commune de $L(G(M))$. Utilisons le coefficient d'indépendance linéaire d'ordre m de $G(M)$: $g_m(M) = g_m(G(M))$.

D'une part $g_m(M)$ est semi-continu supérieurement (2.3). D'autre part $g_m(M)$ ne s'annule pas sur F (2.4). Il s'ensuit que la fonction $1/g_m(M)$ est semi-continue inférieurement sur F , et finie en chaque point. D'après un célèbre théorème de René Baire (BTG IX, p. 77) il existe un ensemble ouvert O , partout dense dans F , tel qu'au voisinage de chaque point de O , $1/g_m$ soit uniformément majorée. Cela signifie que si une suite de points $M_i \in F$ converge vers un point A de O , on peut construire en chaque M_i (sauf peut être un nombre fini de i) un système de m vecteurs unitaires portés par des droites de $G(M_i)$ engendrant un m -paralléloptope de mesure m -dimensionnelle supérieure à une constante fixe. On peut alors extraire de M_i une sous-suite, telle que les systèmes de m vecteurs correspondants convergent vers un système de m vecteurs linéairement indépendants engendrant $L(G(A))$. En d'autres termes, en chaque point A de O , le champ d'éléments

de contact $L(G(M))$ est continu. L'assertion relative au ptg est alors évidente.

Corollaire. Pour un ensemble fermé de R^2 , l'ensemble des points où $L(\text{ptg})$ et ptgl^1 coïncident est partout dense.

Les points de F sont de trois sortes, suivant la dimension de $L(\text{ptg})$.

Lorsque $d(L(\text{ptg})) = 2$ on a $\text{ptgl}^1 = L(\text{ptg})$.

Lorsque $d(L(\text{ptg})) = 0$ cela signifie que le point est isolé et l'on a encore $L(\text{ptg}) = \text{ptgl}^1$.

Supposons que le complémentaire de l'adhérence de la réunion des deux ensembles précédents ne soit pas vide. Alors ce complémentaire est un ouvert dans lequel $d(L(\text{ptg})) = 1$. D'après la Proposition V, cet ouvert contient un ouvert partout dense où $L(\text{ptg}) = \text{ptgl}^1$.

Ce corollaire ne s'étend pas aux autres R^n . La proposition suivante donne le maximum d'indications sur ce que l'on peut dire dans le cas général.

Proposition VI. Soit $M \rightarrow G(M)$ un champ de gerbes de droites satisfaisant à la semi-continuité supérieure d'inclusion. La fonction $M \rightarrow d(M) = d(L(G(M)))$ est semi-continue inférieurement en tout point d'un résiduel R de F .

A) Soit E_i l'ensemble des points de F , où $d(M) = i$. Dans tout ouvert O de F , les E_i ne sont pas simultanément maigres. Soit alors m le plus grand entier tel que $E_m \cap O$ ne soit pas maigre dans O .

B) Construisons, suivant Banach, l'ensemble $D(E_m \cap O)$ des points au voisinage desquels $E_m \cap O$ n'est pas maigre, dans $O \cap F$. (BTG Chap. IX, § 5, Exerc. 1). On sait que $D(E_m \cap O)$ est l'adhérence d'un ouvert non vide $U_m \subset O$. E_m est dense et non maigre dans tout ouvert $\subset U_m$.

C) L'ensemble U_m est la réunion des trois ensembles suivants: U_m^+ qui est la réunion des $E_i \cap U_m$ avec $i > m$. Cet ensemble est maigre dans U_m d'après A).

$U_m^0 = E_m \cap U_m$ qui est dense et non maigre dans tout ouvert de U_m (d'après B)).

Enfin U_m^- , qui est la réunion des $U_m \cap E_i$ avec $i < m$. Nous nous proposons de montrer que U_m^- est rare dans U_m .

D) Pour cela envisageons la fonction $g_m(M)$, qui est semi-continue supérieurement (2.3). Elle s'annule sur U_m^- et seulement sur U_m^- ,

dans U_m . D'après un célèbre théorème de Baire (cf. Baire [1] p. 80) l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction semi-continue sur un espace de Baire, et à valeurs dans un espace métrique, est maigre. Il en résulte que l'ensemble des points de continuité de $g_m(M)$ rencontre certainement U_m^0 ; l'ensemble des points de continuité de $g_m(M)$ qui appartiennent à U_m^0 est dense dans U_m .

E) Soit alors A un tel point de continuité. $g_m(A) \neq 0$, car $A \notin U_m^-$. Il existe par conséquent un voisinage de A , sur lequel g_m ne s'annule pas. Il en résulte que la réunion de U_m^0 et U_m^+ contient un ouvert partout dense de U_m . C'est à dire que U_m^- est rare dans U_m .

F) Dans U_m , la réunion $U_m^+ \cup U_m^-$ est donc maigre. U_m^0 est bien un résiduel. Il en est de même de $R_m = U_m^0 \cap \overline{U_m^-}$.

En tout point de R_m la fonction $d(M)$ vaut m , et n'admet comme valeurs d'adhérence que des valeurs supérieures ou égales à m . En tout point de R_m la fonction d est donc semi-continue inférieurement.

G) Choisissons maintenant $O = F$. On détermine U_m comme précédemment. Si $F - \overline{U_m}$ n'est pas vide, choisissons-le comme ouvert O : l'entier m' correspondant est strictement inférieur à m , par définition de U_m .

Puis l'on construit $F - \overline{U_m} - \overline{U_{m'}}$, etc... La réunion des R_m est le résiduel cherché.

Proposition VII. Le ptgl^1 s'obtient à partir du ptg en itérant $2n$ fois au plus l'opération $\limsup L()$.

En appliquant à un champ de gerbes de droites, possédant la semi-continuité supérieure d'inclusion, l'opérateur $\limsup L()$, on obtient un champ de même nature.

On pose $G_0 = \text{ptg}$ et l'on définit $G_{i+1} = \limsup L(G_i)$ par récurrence. On construit les fonctions $d_i = d(L(G_i))$. Ce sont des fonctions à valeurs entières, comprises entre 0 et n . La suite des fonctions d_i ne peut décroître. Mais en certains points de F , cette suite peut rester stationnaire, pour quelques indices i consécutifs, puis se remettre à croître. C'est le comportement de ces fonctions que nous allons examiner.

A) On peut construire la fonction $\lambda_i(M) = \limsup_{N \rightarrow M} d_i(N)$ qui est semi-continue supérieurement (B TG Chap. IV § 6). On a $d_{i+1} \geq \lambda_i$. Car, dire que $\lambda_i(A) = k$ c'est dire qu'il existe une suite de points M_j , tendant

vers A , telle que $d_i(M_j) = k$. C'est dire que $\limsup L(G_i(A))$ contient une sous-variété à k dimensions: donc $d_{i+1}(A) \geq k$.

B) Montrons que, si sur un ouvert O de F $d_i(M) = d_{i+1}(M)$, alors $LG_i = G_{i+1} = \text{ptgl}^1$ sur O . On a en effet les inclusions:

$$LG_{i+1}(M) \supset G_{i+1}(M) = \limsup L(G_i(M)) \supset L(G_i(M)).$$

Les termes extrêmes, étant de même dimension, sont égaux. On en déduit que G_{i+1} est un champ d'éléments de contact possédant la semi-continuité d'inclusion et agrandissant le ptg sur O . Comme la notion de ptgl^1 est une notion locale, $LG_i = G_{i+1}$ se réduit bien au ptgl^1 sur O .

C) Ceci posé, appelons O_i le plus grand ouvert de F (éventuellement vide) sur lequel $LG_i = \text{ptgl}^1$. Soit F_i le complémentaire de O_i .

Nous allons établir que sur F_i supposé non vide, on a

$$d_{i+2}(M) > i/2.$$

D) Cette formule se réduit à $d_2(M) > 0$ sur F_0 , et $d_3(M) > 0$ sur F_1 pour $i = 0$ et $i = 1$. Or ceci est évident: F_0 et à fortiori F_1 ne contient pas de points isolés de F (caractérisés par $d_i(M) = 0$ pour tout i).

E) Supposons la formule démontrée jusqu'à $i - 1$. Sur F_i , l'ensemble des points pour lesquels $d_{i+1}(M) \neq d_i(M)$ est partout dense. En effet, s'il existait un ouvert non vide de F_i sur lequel $d_{i+1}(M) = d_i(M)$, on obtiendrait, en le réunissant à O_i un ouvert de F ⁽¹⁰⁾ strictement plus grand que O_i et sur lequel $d_{i+1} = d_i$; il s'ensuivrait une contradiction entre B) et le caractère maximal de O_i .

F) Comme d_{i+1} est strictement supérieur à d_i sur un ensemble partout dense de F_i , et que d_i est strictement supérieur à $(i-2)/2$ sur $F_{i-2} \supset F_i$ (hypothèse de récurrence), il s'ensuit que d_{i+1} est strictement supérieur à $i/2$ sur un ensemble partout dense de F_i .

Donc λ_{i+1} est strictement supérieur à $i/2$ sur F_i . D'après A) $d_{i+2} \geq \lambda_{i+1} > i/2$ sur F_i . La formule C) est établie.

G) Considérons l'ensemble F_{2n-2} . Ou bien il est vide, ce qui signifie que $2n-2$ opérations au plus suffisent à construire le ptgl^1 . Si F_{2n-2} n'est pas vide on a sur F_{2n-2} $d_{2n} > n-1$. Cela signifie que sur F_{2n-2} LG_{2n} est à n dimensions, c'est à dire identique au ptgl^1 . $2n$ opérations suffisent donc pour obtenir le ptgl^1 .

10. (cf. B TG Chap. I, § 3, — Remarque finale).

Remarque. Le nombre $2n$ n'est peut être pas le meilleur possible; de toutes façons dans le cas $n = 2$ une seule opération lim-sup suffit pour obtenir le ptgl^1 à partir du ptg .

Nous allons maintenant construire un exemple d'ensemble fermé dans R^3 , dont le ptg en chaque point est composé de 1 ou 2 droites. d_1 est par conséquent inférieur ou égal à 2. Cependant le ptgl^1 est partout à 3 dimensions !

Exemple 5. Soit $i \rightarrow \varepsilon(i)$ une fonction définie sur l'ensemble des entiers positifs et ne prenant que les valeurs 0 et 1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de ces fonctions. A partir d' ε nous allons construire les deux fonctions $\lambda_\varepsilon(i)$ et $\mu_\varepsilon(i)$.

$\lambda_\varepsilon(i)$ (resp. $\mu_\varepsilon(i)$) sera égal, pour l'entier i , au plus grand entier (s'il existe) strictement inférieur à i et tel que $\varepsilon(\lambda_\varepsilon(i)) = 1$, (resp. 0). (Pour les petites valeurs de i ; λ (resp. μ) peut ne pas être défini. Nous le prendrons égal à 1). Notons que pour tout i , l'une des deux fonctions λ ou μ prend la valeur $i - 1$. Mais l'autre peut être largement inférieure à i . Si ε ne prend qu'un nombre fini de fois la valeur 1 (resp 0) alors $\lambda_\varepsilon(i)$ (resp. $\mu_\varepsilon(i)$) reste bornée. Inversement si ε prend une infinité de fois les valeurs 0 et 1, alors les fonctions λ et μ tendent toutes deux vers l' ∞ , avec i , sans décroître.⁽¹¹⁾ L'ensemble P que nous allons construire est l'ensemble des points de R^3 dont les coordonnées sont données à partir d'une fonction ε , par les formules

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon(i) \frac{1}{2^{[4i]^2}} \cos \frac{\pi}{\lambda_\varepsilon(i)} + \sum_{i=1} [1 - \varepsilon(i)] \frac{1}{2^{[4i+(-1)^i]^2}} \cos \frac{\pi}{\mu_\varepsilon(i)} \\ y &= \sum \varepsilon(i) \frac{1}{2^{[4i]^2}} \sin \frac{\pi}{\lambda_\varepsilon(i)} \\ z &= \sum [1 - \varepsilon(i)] \frac{1}{2^{[4i+(-1)^i]^2}} \sin \frac{\pi}{\mu_\varepsilon(i)}. \end{aligned}$$

11. Voici un exemple numérique illustrant ce que peuvent être ces fonctions ε , λ_ε et μ_ε .

$$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.$$

$$\varepsilon(i) = 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0.$$

$$\lambda_\varepsilon(i) = 1, 1, 1, 1, 1, 5, 6, 6, 6, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.$$

$$\mu_\varepsilon(i) = 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 17.$$

En d'autres termes, tout point de P est l'extrémité du vecteur somme de la série vectorielle $\varepsilon(i) \cdot \vec{V}_i + (1 - \varepsilon(i)) \cdot \vec{W}_i$.

Les $\vec{V}_i$ (resp. $\vec{W}_i$) sont situés dans le plan xOy (resp. xOz), et ils font les angles $\alpha_e(i) = \frac{\pi}{\lambda_e(i)}$ (resp. $\beta_e(i) = \frac{\pi}{\mu_e(i)}$) avec Ox .

1) Le choix des modules des $\vec{V}_i$ et $\vec{W}_i$ est motivé comme suit :

Considérons le "reste" $\sum_{i=i_0+1}^{\infty} V_i$; pour i_0 assez grand, ce reste est négligeable devant $\vec{V}_{i_0}$. Il en résulte que l'angle du vecteur $\vec{V}_{i_0}$ avec le vecteur $\sum_{i=i_0}^{\infty} \vec{V}_i$ tend vers 0 lorsque i_0 augmente indéfiniment.

Il en est de même pour les $\vec{W}_i$, et l'on a une conclusion analogue en écrivant alternativement $\vec{V}_i$ et $\vec{W}_i$ en ordre de module décroissant. On notera, en particulier que dès que i est assez grand, l'un des deux vecteurs $\vec{V}_i$ et $\vec{W}_i$ est négligeable devant l'autre. La présence du terme $(-1)^i$ fait que pour les deux vecteurs $\vec{V}_i$ et $\vec{W}_i$ de même indice i , ce n'est pas systématiquement $\vec{V}_i$ qui est le plus grand.

2) Quant au choix des angles $\alpha_e(i)$ et $\beta_e(i)$, dont la raison n'apparaîtra pleinement qu'au 7) (c'est dans ce choix que réside l'idée essentielle) disons pour l'instant, que lorsque la fonction $\lambda_e(i)$ prend plusieurs fois de suite la même valeur, (ce qui signifie que $\varepsilon(i)$ s'annule plusieurs fois consécutivement), la présence du facteur $\varepsilon(i)$ devant $\vec{V}_i$ fait que l'angle n'intervient effectivement qu'une seule fois. Ainsi la suite des angles $\alpha_e(i)$ affectés à des vecteurs non nuls est strictement décroissante, et tend vers 0. Il en est de même pour $\beta_e(i)$. Mais la suite des angles α ou β rangés dans l'ordre des indices i , n'est pas strictement décroissante: après une longue série d' α , un β peut brusquement apparaître.

On notera que les séries vectorielles considérées, sont normalement convergentes, et uniformément lorsque ε décrit $\mathfrak{E}$. Mais les angles α ou β tendent vers 0 pour un ε donné, mais non uniformément, lorsque ε décrit $\mathfrak{E}$.

3) L'ensemble P est parfait. On vérifie immédiatement que l'application de $\mathfrak{E}$ dans P est biunivoque, et continue lorsqu'on munit $\mathfrak{E}$ de la topologie de la convergence simple. Or on sait que $\mathfrak{E}$ est alors

compact (théorème de Tychonoff). P est donc homéomorphe à $\mathfrak{G}$, qui est un espace bien connu (espace à 0 dimension de Baire).

4) On peut partager P en trois sous-ensembles P_1 , P_2 et P_3 disjoints de la façon suivante :

P_1 (resp. P_2) correspond aux ε qui ne prennent qu'un nombre fini de fois la valeur 1 (resp. 0). P_1 et P_2 sont donc dénombrables et denses dans P . L'ensemble restant P_3 est donc un résiduel.

5) Calcul du ptg. Si $M \in P$, on commencera par considérer des cordes $M'M''$ voisines de M . Pour cela on choisira un entier i' très grand, et l'on envisagera deux fonctions ε' et ε'' de $\mathfrak{G}$ qui ne diffèrent de ε qu'à partir du rang i' . Le vecteur $\overrightarrow{M'(\varepsilon')M''(\varepsilon')}$ s'obtient en faisant la différence de deux séries vectorielles représentant $M'(\varepsilon')$ et $M''(\varepsilon'')$. Et comme ces séries ont au moins les i' mêmes premiers termes, il s'ensuit que la série $\overrightarrow{M'M''}$ ne commence qu'avec des vecteurs $\vec{V}_i$ (ou $\vec{W}_i$) de rang supérieur à i' . Nous nous intéressons à la direction du vecteur $\overrightarrow{M'M''}$. Or d'après 1) cette direction ne diffère sensiblement pas de la direction du vecteur "prépondérant" (plus grand vecteur de la série $\overrightarrow{M'M''}$). Il s'agit donc de déterminer les directions d'accumulation des directions des vecteurs prépondérants possibles.

6) Si $M \in P_3$, M provient d'une fonction ε , pour laquelle ni λ_ε , ni μ_ε ne restent bornés. On peut donc choisir i' en sorte que $\pi/\lambda_\varepsilon(i')$ et $\pi/\mu_\varepsilon(i')$ soient arbitrairement petits. Il en résulte que $M'M''$ fait un angle aussi petit que l'on veut avec Ox .

En tout point de P_3 , le ptg se réduit à une droite: la parallèle à Ox .

7) Plaçons-nous en $M \in P_1$. M correspond à un ε qui ne prend que la valeur 0 à partir d'un certain rang i_0 . Choisissons i' très supérieur à i_0 . Divers cas se présentent suivant la nature du terme dominant de la série $\overrightarrow{M'(\varepsilon)M''(\varepsilon')}$.

a) Si ce terme dominant est un vecteur $\vec{W}_i$, alors il forme un angle β avec Ox construit à partir d'une valeur de $\mu > i' - 1$. Donc les directions d'accumulation des vecteurs prépondérants W se réduisent à la seule direction Ox .

b) Il peut se faire que le vecteur dominant de $\overrightarrow{M'M''}$ soit un vecteur $\vec{V}$, et plus précisément le vecteur $\vec{V}$ correspondant à la première

apparition de la valeur 1 dans ε' ou ε'' . (La valeur 1 était déjà apparue au rang $i_0 - 1$ mais elle peut resurgir une première fois à un rang supérieur à i'). Dans ces conditions la vecteur dominant fera un angle π/i_0 avec Ox , et cela si grand que soit i' . Le ptg en M comporte donc une direction du plan xOy , faisant l'angle π/i_0 avec Ox .

c) Il peut enfin se faire que la première apparition d'un vecteur $\vec{V}$ (après le rang i_0) dans la série qui donne M' , coïncide avec l'apparition d'un $\vec{V}$ dans la série M'' . Dans ce cas ces deux vecteurs $\vec{V}$ se neutralisent dans la différence $M' - M''$. Si le vecteur prépondérant de la différence $M' - M''$ est un $\vec{V}$ ultérieur, celui-ci fera un angle inférieur à π/i'' avec Ox . Dans ce cas on obtient encore Ox comme direction du ptg.

En résumé, le ptg en chaque point de P_1 se réduit à deux droites. D'une part la parallèle à Ox , d'autre part une droite parallèle au plan xOy , et dont la direction est distincte de celle de Ox .

8) Naturellement en tout point de P_2 le ptg se réduit à deux droites dont l'une a la direction Ox et dont l'autre est parallèle à xOz . (Même raisonnement).

9) En résumé, $L(\text{ptg})$ se réduit à la parallèle à Ox sur le résiduel P_3 , $L(\text{ptg})$ est le plan parallèle à xOy sur P_1 , et le plan parallèle à xOz sur P_2 . Comme P_1 et P_2 sont denses dans P , $\limsup L(\text{ptg})$ se réduit à un couple de plans rectangulaires en chaque point de P . Donc ptgl^1 est à trois dimensions partout.

Bien qu'en chaque point de P le ptg puisse se localiser dans un plan, il n'existe aucune immersion locale de P dans une surface 1-fois continûment dérivable. Ce que nous voulions illustrer.

Remarques. 1) M. Choquet avait déjà construit, dans sa thèse [1], page 19, un contre-exemple, comportant une singularité analogue à celle que nous obtenons, mais uniquement sur un ensemble parfait de l'ensemble construit.

2) Dans la définition de ptgl^1 on aurait pu songer à substituer la notion de contingent à celle de paratingent, en espérant que l'opération $\limsup$ supprimerait la différence. Il n'en est rien comme le montre l'exemple d'une courbe ayant en tout point une tangente variant continûment, mais présentant un point de rebroussement. En ce point $L(\text{ptg})$ est un plan.

Mais $L(\text{ctg})$ qui se réduit en chaque point à une droite est un champ continu d'éléments de contact.

7. Le paratingent linéarisé d'ordre m .

Le Théorème 1 fournissait une propriété caractéristique du ptgl^1 . C'est une généralisation de cette propriété caractéristique que nous prendrons comme définition du ptgl^m .

Proposition VIII. En tout point $A \in F$ existe un élément de contact et un seul, noté $\text{ptgl}^m(A)$ qui est la variété linéaire tangente commune à toutes les immersions minimales locales m -fois continûment dérivables (resp. indéfiniment dérivables) de F en A . $\text{ptgl}^m(A)$ est aussi l'intersection des variétés linéaires tangentes à toutes les immersions locales en A , m -fois continûment dérivables.

Il existe toujours des immersions de F ; ne fût-ce que R^n . Soit alors V une immersion locale minimale en A de dimension p et m fois (resp. indéfiniment) dérivable. Si $p = n$ la proposition est triviale. Supposons donc $p \neq n$, et soit V' une autre immersion locale en A . On peut affirmer que la variété linéaire tangente en A à V' contient la variété linéaire tangente à V . Car en définissant V par un système de $n - p$ équations implicites, on pourrait, si notre assertion n'était pas exacte, adjoindre à ces $n - p$ équations au moins une équation prélevée sur le système qui définirait V' , de façon à obtenir un nouveau système de $n - p + 1$ équations linéairement indépendantes; ce système définirait une immersion locale à $p - 1$ dimensions, ce qui contredirait la "minimalité" de V .

Corollaire 1. Toute fonction m -fois continûment dérivable (resp. indéfiniment dérivable) qui s'annule sur F a ses dérivées nulles suivant toutes les directions contenues dans ptgl^m (resp. ptgl^∞).

Car une fonction nulle sur F , et dont une dérivée suivant une direction située dans $\text{ptgl}^m(A)$ n'est pas nulle, définit une immersion locale (th. des fonctions implicites). L'hyperplan tangent en A à cette variété d'immersion, contient $\text{ptgl}^m(A)$ d'après la Proposition VIII, d'où une contradiction.

Corollaire 2. En identifiant chaque point $A \in F$ à une mesure de Dirac de support A , et chaque distribution à

support ponctuel et d'ordre 1 à un vecteur lié, on peut énoncer le corollaire précédent sous la forme: "Les vecteurs liés situés dans les ptgl^m des divers points de F sont les distributions à support ponctuel d'ordre 1, appartenant à l'adhérence faible dans $(D^m(R^n))$, du sous-espace engendré par les mesures de Dirac dont le support est dans F ".

(cf. th. du biorthogonal (B EVT Chap. IV §1 Prop. 4)).

En effet l'orthogonal dans $\mathfrak{D}^m(R^n)$ du sous-espace de $(\mathfrak{D}^m(R^n))'$ engendré par les mesures de Dirac à support dans F , est l'idéal $I^m(F)$ des fonctions s'annulant sur F . Le biorthogonal est l'ensemble des distributions d'ordre $\leq m$ qui s'annulent sur toute fonction appartenant à cet idéal $I^m(F)$.

Corollaire 3. Le ptgl^m est un champ d'éléments de contact possédant la semi-continuité d'inclusion et l'on a:

$$\text{ptg} \subset \text{ptgl}^m \subset \text{ptgl}^{m+1} \subset \text{ptgl}^\infty.$$

La semi-continuité d'inclusion résulte du fait qu'une immersion minimale en un point A de F est encore une immersion (non forcément minimale) en tout point M d'un voisinage de A .

Corollaire 4. Le $\text{ptgl}^{m'}$ est un covariant du groupe des transformations régulières m -fois continûment dérivables du pavé K dans lui-même ($m' \leq m$).

Une application m -fois continûment dérivable de K dans K et régulière en A , transforme toute immersion locale m -fois continûment dérivable (et plus généralement m' fois continûment dérivable avec $m' < m$) en une immersion de même nature de l'image. La différentielle de cette application transforme alors $\text{ptgl}^{m'}$ en un $\text{ptgl}^{m'}$ correspondant.

En particulier les nombres d_i qui représentent les dimensions des ptgl^i ($i \leq m$) sont des invariants numériques locaux du fermé F dans R^n .

Définition. Nous dirons d'une fonction, d'une variété qu'elle est strictement m -fois continûment dérivable, si elle est en tout point m -fois continûment dérivable et n'est en aucun point $m+1$ fois continûment dérivable.

Une primitive même d'une fonction continue n'admettant de dérivée nulle part est strictement m -fois continûment dérivable.

Exemple 6. Soit dans R^3 une surface strictement 4 fois continûment

dérivable. Traçons sur cette surface une courbe C strictement 2 fois dérivable.

En chaque point de cette courbe on a

$$d_{\infty} = d_5 = 3 \quad d_4 = d_3 = 2 \quad d_2 \text{ et } d_1 = 1.$$

8. Notions sur les ensembles critiques.

Un ensemble fermé de R^n est appelé m -critique, s'il existe une fonction $f \in D^m(R^n)$ (dite fonction m -critique) non constante sur F , et ayant cependant sa dérivée première nulle sur F .

Tout ensemble non connexe est trivialement m -critique.

Un ensemble connexe par arcs rectifiables n'est pas m -critique, comme le montre la formule de la moyenne.

Whitney (cf. [5]) a construit pour tout m des courbes m -critiques situées dans R^{m+1} .

Un exemple plus élémentaire est fourni par la célèbre courbe de von Koch ([1]).

Exemple 8.

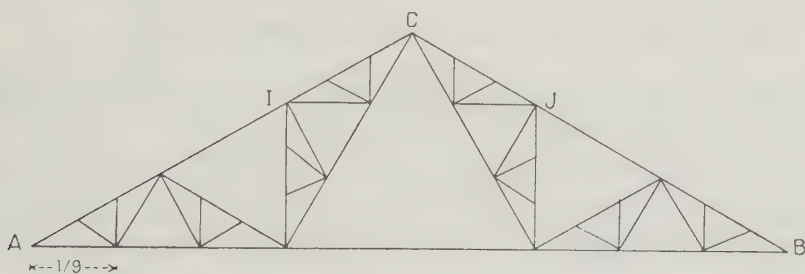


Figure 2

On sait que cette courbe C n'est pas rectifiable; mais on peut définir sur C une mesure: sa "pseudo-longueur" (Cf. Bouligand [1] p. 218) possédant l'"exposant de similitude" $\alpha = \log 4 / \log 3$. Cela veut dire que si l'on soumet C à une similitude de rapport k , sa pseudo-longueur est multipliée par k^α .

On sait que cette courbe est localement semblable à elle-même.

Lemme. Il existe deux constantes K et K' telles que, pour tout couple de points $M, N \in C$, on ait :

$$0 \leq K' \cdot \|MN\|^\alpha \leq \text{pseudo-longueur de l'arc } \widehat{MN} \leq K \cdot \|MN\|^\alpha.$$

L'existence des constantes est trivialement assurée si l'on se borne à

envisager des couples M, N satisfaisant à $\|MN\| \geq 1/9$ (si l'on prend $1 = \|AB\|$ pour unité de longueur).

Remarquons alors que si $\|MN\| \leq 1/9$, l'arc $\widehat{MN}$ est entièrement intérieur à l'un des trois arcs suivants : $\widehat{AC}$, $\widehat{IJ}$, ou $\widehat{BC}$ (cf. fig.). Il en résulte qu'il existe une similitude de rapport $\sqrt[3]{3}$ ou 3 (suivant le cas) qui transforme l'arc $\widehat{MN}$ en un autre arc de C .

Ceci posé, quels que soient M et N , il existe un entier k tel que $1/(\sqrt[3]{3})^{k+1} \leq \|MN\| \leq 1/(\sqrt[3]{3})^k$. Tant que $k \geq 4$, la remarque précédente permet de substituer à l'arc $\widehat{MN}$ un arc plus grand semblable au premier.

Dans une telle similitude, le rapport $\frac{\text{ps-long } \widehat{MN}}{\|MN\|^\alpha}$ n'est pas modifié.

On peut donc toujours se ramener au cas où $\|MN\| \geq 1/9$. Le lemme est ainsi établi.

Posons alors $\dot{f}(M) =$ pseudo-longueur de l'arc $\widehat{MN}$ et $D_M^1 \dot{f} = 0$ sur C . Il résulte du lemme précédent que l'on a ainsi défini sur C un champ W -taylorien d'ordre 1 pour le module de continuité $Kx^{\alpha-1}$. Car

$$|\dot{f}(M) - \dot{f}(N) - D_N^1 \dot{f}[\overrightarrow{MN}]| \leq K\|MN\| \cdot \|MN\|^{\alpha-1}.$$

Ce champ W -taylorien se laisse prolonger à R^2 en une fonction 1-critique. La courbe de von Koch est donc une courbe 1-critique.

Plus généralement, chaque fois que l'on saura construire une courbe sur laquelle existent des fonctions "à dérivée nulle", on obtiendra un ensemble 1-critique. Par exemple, les courbes que M. Choquet avait déjà construit dans [2] auraient pu être utilisées par M. Whitney. On peut se demander si chaque fois qu'une courbe possède au voisinage de chacun de ses points une dimension de Hausdorff égale à $\alpha > 1$, un lemme analogue à celui que nous avons obtenu pour la courbe de von Koch ne pourrait pas être énoncé. Il n'en est rien!

M. Besicovitch nous a signalé un contre-exemple à cette conjecture. Mais on peut aussi le déduire du rapprochement suivant :

D'une part M. Besicovitch et Ursell [1] ont montré que pour tout $2 > \alpha > 1$, il existe des fonctions numériques dont le graphe admet précisément α comme dimension de Hausdorff.

D'autre part, M. Choquet a démontré que le graphe d'une fonction continue n'est jamais un ensemble 1-critique ([2] p. 49).

Ensembles de type I_m . La notion d'ensemble m -critique intervient dans la théorie de l'intégration d'une forme différentielle, sur un fermé F . Étant donné une forme différentielle, qui est un champ W -taylorien, $m-1$ fois continûment dérivable défini sur F , et à valeurs dans le dual de E , on peut se proposer de rechercher un champ W -taylorien $\{\dot{f}\}$ dont la forme donnée soit la dérivée: c'est le problème de l'intégration. Ce problème est en général indéterminé (constante d'intégration). Mais cette indétermination n'est pas bien gênante dans le cas où F est de type I_m .

Définition. On dit qu'un ensemble F est de type I_m , si le sous-espace de $W^m(F)$ (cf. Chap. I) formé des champs- W -taylorien tels que $D^1 f = 0$, $D^2 f = 0$, ..., $D^m f = 0$, est de dimension finie. Il est appelé le sous-espace des éléments critiques; (ce sous-espace contient toujours les constantes).

On dit qu'un ensemble F est de type I_m^k , si le sous-espace de $W^m(F)$ caractérisé par $D^k f = 0$, $D^{k+1} f = 0$, ..., $D^m f = 0$, est de dimension finie. Il est évident que I_m^k implique I_m ;

La notion d'ensemble I_m est invariante par le groupe des homéomorphismes m fois continûment dérivables; cela tient à ce qu'en composant une fonction à dérivée nulle en un point, avec une transformation du groupe, on obtient une fonction ayant une dérivée nulle au point image. Par contre, nous ignorons si la notion d'ensemble de type I_m^k ($k \neq 1$) est invariante, par le groupe des homéomorphismes m -fois continûment dérivables.

(8; 1). Un ensemble de type I_m (resp. I_m^k) n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. (Sinon, les fonctions caractéristiques d'ensembles à la fois ouverts et fermés définiraient des éléments de $W^m(F)$ engendrant un sous-espace de dimension infinie).

(8; 2). La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble connexe soit de type I_m est qu'il ne soit pas m -critique:

En effet, s'il existait une fonction f non constante sur F et dont la dérivée $D^1 f$ s'annule sur F , la fonction composée $P(f)$ (où P est un polynôme) posséderait la même propriété. Les fonctions de la forme $P(f)$ engendreraient ainsi un sous-espace vectoriel de dimension infinie. Ainsi, pour un ensemble F connexe, deux cas peuvent se présenter: ou bien le sous-espace de $W^m(F)$ formé des champs W -tayloriens tels que $D^1 \dot{f} = 0$ est de

dimension infinie (et F est alors m -critique) ou bien ce sous-espace se réduit à l'espace des constantes (il est de dimension 1).⁽¹²⁾

Dans le cas de la courbe de von Koch, on peut même préciser ce résultat comme suit: Si α est l'exposant de similitude de C , il n'existe pas de champ W -taylorien 1-critique admettant un 1-module de continuité de la forme $x^{\beta-1}$ (où $\beta > \alpha$). En effet, si $\{\dot{G}(M)\}$ est un tel champ W -taylorien, on a $|G(M) - G(N)| \leq \|MN\|^\beta$ pour M et $N \in C$.

Mais d'après le lemme relatif à C , on a

$$\|MN\|^\alpha \leq K' |f(M) - f(N)|$$

où $f(M)$ désigne la pseudo-longueur de l'arc $\widehat{AM}$. (L'application $M \rightarrow f(M)$ est un homéomorphisme de C sur un intervalle de R). Ainsi

$$|G(M) - G(N)| \leq K'^{\beta/\alpha} \cdot |f(M) - f(N)|^{\beta/\alpha}.$$

Comme $\beta/\alpha > 1$, cela signifie que la fonction numérique composée $G(f^{-1})$ définie sur un intervalle de R , possède une dérivée partout nulle. On en déduit que cette fonction composée est constante; par conséquent la fonction $G(M)$ l'est aussi.

Par contre il est facile de construire des fonctions 1-critiques sur C admettant un module de continuité x^β quelconque avec $\beta \leq \alpha$. Par exemple, on sait qu'il existe des fonctions numériques croissantes h satisfaisant (strictement) à toute condition de Hölder, d'exposant $r < 1$ donné à l'avance (cf. par exemple Salem [1]). En posant $G(M) = h(f(M))$ et en disposant de l'exposant r de telle façon que $r\alpha = \beta$ il vient

$$|G(M) - G(N)| \leq |f(M) - f(N)|^r \leq K \cdot \|MN\|^{r\alpha} = K \|MN\|^\beta.$$

En supposant que $|G(M) - G(N)| = |f(M) - f(N)|^r$ pour une infinité de couples de points M, N dont la distance tend vers 0, on trouve que x^β est un 1-module strict pour $G(M)$.

(8; 3). Il existe des ensembles qui sont de type I_m mais qui ne sont pas de type I_m^k ($k \neq 1$). Cela résulte simplement des travaux de M. Sion ([1] cf. Th. 8.1 p. 208); cet auteur montre en effet qu'il existe des courbes tracées dans R^{m-1} qui sont k -critiques et qui sont telles que toute forme

12. Nous n'avons pas su élucider la question suivante: "Existe-t-il des ensembles connexes de type I_m^k ($k \geq 2$) pour lequel l'espace des champs W -tayloriens satisfaisant à $D^k \dot{f} = 0$, $D^{k+1} \dot{f} = 0$, ..., $D^m \dot{f} = 0$, (de dimension finie par définition) comporte des champs W -tayloriens pour lesquels $D^{k-1} \dot{f}$ n'est pas constant".

différentielle k -fois continûment dérivable peut être "intégrée" le long de cette courbe (non rectifiable). Il en résulte l'existence de champs W -tayloriens d'ordre m dérivables dont les dérivées D^{k+1} , D^{k+2} , ..., D^m sont nulles, sans que D^0 soit la restriction d'un polynôme à la courbe. Donc ces courbes ne sont pas de type I_m^{k-1} . Mais par ailleurs il résulte d'un théorème de A. P. Morse que dans R^{m-1} tout ensemble connexe est de type I_m . (cf. Glaeser [3]).

9. Ensembles connexes par arcs rectifiables.

Un compact F de R^n est dit connexe par arcs rectifiables si deux points quelconques M et N de cet ensemble peuvent toujours être joints par un arc rectifiable contenu dans F . Sur un tel ensemble on appelle "distance géodésique" la borne inférieure des longueurs des arcs qui joignent M à N . Cette distance définit sur F une métrique et une topologie (plus fine que la topologie déterminée par la métrique euclidienne), mais qui peut être strictement plus fine. Les deux figures ci-dessous illustrent cette éventualité. La seconde figure montre en particulier que F peut être de diamètre géodésique infini. ⁽¹³⁾

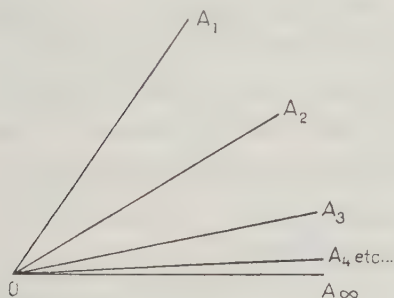


Figure 3.

Réunion d'une infinité de segments OA_k . Les A_k tendent vers A_∞ au sens euclidien, mais non au sens géodésique.

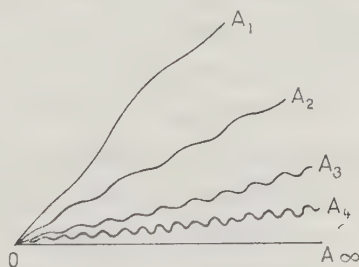


Figure 4.

Réunion d'une infinité d'arcs OA_k . La longueur des arcs A_k n'est pas bornée.

13. L'ensemble de la Figure 4 n'est pas localement connexe. Mais en choisissant les points A_k , tendant (pour la métrique euclidienne) vers 0, on obtient un ensemble localement connexe par arcs rectifiables, de diamètre géodésique infini et où la topologie de la métrique euclidienne est strictement moins fine que la topologie de la métrique géodésique.

Soit maintenant F un compact connexe quelconque de R^n , et ρ une longueur donnée. Le ρ -voisinage dans R^n de F (ensemble des points de R^n situés à moins de ρ de F) est connexe par arcs rectifiables et les topologies définies par les métriques euclidiennes et géodésiques sont les mêmes : c'est une conséquence facile du théorème de Borel-Lebesgue.

Nous avons alors une caractérisation commode des ensembles connexes par arcs rectifiables et de diamètre géodésique borné :

(9.1) La condition nécessaire et suffisante pour qu'un compact F de R^n soit connexe par arcs rectifiables et de diamètre géodésique borné est que les diamètres géodésiques de ses ρ -voisinages restent bornés lorsque ρ tend vers 0.

Il est clair que si F est de diamètre géodésique borné d tout ρ -voisinage est de diamètre inférieur ou égal à $d + 2\rho$.

Inversement supposons les diamètres géodésiques des ρ -voisinages bornés par d . Pour deux points M et N de F , il existe une suite d'arcs rectifiables C_ρ de longueur $\leq d$ situés respectivement dans le ρ -voisinage de F et joignant M à N . Or, c'est une conséquence classique du théorème d'Ascoli, qu'une telle suite d'arcs est relativement compacte pour la topologie de Hausdorff (pour les ensembles fermés situés dans un compact). Il en résulte que M et N peuvent être joints par un arc rectifiable situé dans F et de longueur $\leq d$. (C. Q. F. D.)

La définition suivante nous sera utile au Chap. III.

Définition. Un ensemble F compact connexe par arcs rectifiables est dit régulier au sens de Whitney (cf. [4]), s'il existe une constante K telle que $\widehat{MN} < K \cdot \|MN\|$ pour tout couple de points situés dans F .

CHAPITRE III LES ALGÈBRES DE WHITNEY

1. Les distributions fondamentales.

Soit $\mathfrak{D}^m(K)$ l'algèbre des fonctions numériques m -fois continûment dérivables, définies sur un pavé compact K . Dans le dual $(\mathfrak{D}^m(K))'$

nous envisageons trois sortes de distributions particulières que nous appellerons les distributions fondamentales. Une distribution ponctuelle fondamentale est définie par la donnée d'un point $A \in K$, un entier $k \leq m$ (son ordre) et un tenseur symétrique de degré k et de norme 1. Cette distribution est la forme linéaire continue sur $\mathfrak{D}^m(K)$,

(1.1) définie par $f \rightarrow D_A^k f[\Theta]$. Cette distribution sera notée $D_A^k[\Theta]$.

Une distribution biponctuelle fondamentale est la forme linéaire

$$(1.2) \quad f \rightarrow \frac{D_A^k f[\Theta] - T_B^k f(A)[\Theta]}{\|AB\|^{m-k}}.$$

Elle sera notée $\Delta_{A,B}^k[\Theta]$. Par convention $\Delta_{A,A}^k[\Theta] = 0$.

Proposition I. L'application $(A, \Theta) \rightarrow D_A^k[\Theta]$ de $K \times [\odot E]$ dans $(\mathfrak{D}^m(K))'$ muni de la topologie faible est un homéomorphisme.

L'application $(A, B, \Theta) \rightarrow \Delta_{A,B}^k[\Theta]$ de $K \times K \times (\odot E)$ dans $(\mathfrak{D}^m(K))'$ faible est continue.

La première assertion résulte de

$$\|D_A^k f[\Theta] - D_B^k f[\Theta']\| = \|(D_A^k f[\Theta] - D_A^k f[\Theta'])\| + \|(D_A^k f[\Theta'] - D_B^k f[\Theta'])\|$$

qui est majoré par

$$\|AB\|^{m-k} \cdot \alpha_f(\|AB\|) + \|f\|_K^m \cdot \|\Theta - \Theta'\|.$$

La continuité de la seconde application en chaque point (A, B, Θ) où $A \neq B$ est alors évidente. Et $\Delta_{A,B}^k[\Theta]$ tend faiblement vers 0 lorsque (A, B) tend vers un point de la diagonale de $K \times K$, les tenseurs Θ restant bornés (de norme 1).

Corollaire. L'ensemble des distributions fondamentales est faiblement compact.

L'espace des distributions ponctuelles fondamentales pour $k \leq m-1$ est fortement compact (conséquence immédiate du théorème d'Ascoli).

Si $\mathfrak{B}^k$ représente la boule unité de $\odot E$, l'ensemble des distributions ponctuelles fondamentales muni de la topologie faible est homéomorphe à $K \times \mathfrak{B}^k$.

Désignant par $\mathfrak{R}$ la relation d'équivalence sur $K \times K$ qui identifie les points de la diagonale, l'ensemble des distributions biponctuelles fonamen-

tales d'ordre k est homéomorphe à $\frac{K \times K \times \mathfrak{B}^k}{\mathfrak{R}}$, comme image biunivoque continue d'un compact.

Notons encore que $\mathfrak{D}^m(K)$ est de "type dénombrable" (alias séparable), car il est engendré par les polynômes. La boule unité de $(\mathfrak{D}^m(K))'$ est donc faiblement métrisable (B. EVT Chap. IV, § 5, Prop. 2).

2. Algèbres de Whitney.

Soit F une partie compacte de K . Nous appellerons $I^m(F)$ (resp. $J^m(F)$) l'idéal fermé des fonctions de $\mathfrak{D}^m(K)$ qui s'annulent sur F (resp. qui s'annulent ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre m sur F). Il est bien connu que $J^m(F)^{(1)}$ est l'adhérence de l'idéal des fonctions de $\mathfrak{D}^m(K)$ qui s'annulent chacune dans un voisinage de F fermé. La théorie des algèbres régulières (Silov) exprime que tout idéal fermé de spectre F est compris entre $I^m(F)$ et $J^m(F)$ (cf. par exemple Loomis (1) p. 84).

Définition. L'algèbre de Whitney $W^m(F)$ est par définition le quotient $\mathfrak{D}^m(K)/J^m(F)$.

Tout élément de $W^m(F)$ peut être identifié à un champ W-taylorien d'ordre m (cf. Chap. I): Car tout champ W-taylorien d'ordre m se laisse prolonger à K , en une fonction $\in \mathfrak{D}^m(K)$. Deux prolongements d'un même champ W-taylorien sont équivalents modulo $J^m(F)$. Inversement toute fonction $\in \mathfrak{D}^m(K)$ induit sur F un champ W-taylorien.

Normes. On peut définir sur $W^m(F)$ diverses structures d'algèbres normées. Parmi les normes que l'on peut retenir signalons les trois suivantes :

a) $\| \dot{f} \|_F^m = \max \| D_M^k f \|$ pour $0 \leq k \leq m$ et $M \in F$.

Cette norme peut paraître la plus naturelle; elle généralise la norme $\| f \|_K^m$ d'une façon immédiate. Mais en général W_F^m n'est pas complet pour cette norme. (Nous reviendrons sur cette question au § 4).

Il est donc nécessaire de trouver une autre norme plus satisfaisante.

b) On peut normer l'algèbre de Whitney $W^m(F)$ à l'aide de la norme

1. En effet à tout $\varphi \in J^m(F)$, et à tout nombre $d > 0$, on peut associer une fonction $\psi_d \in \mathfrak{D}^m(K)$ telle que $\varphi - \psi_d$ soit nulle sur le $d/4$ -voisinage de F et soit égale à φ hors du d -voisinage de F . De plus les $\varphi - \psi_d$ tendent vers φ (au sens de $\mathfrak{D}^m(K)$) lorsque d tend vers 0. (On trouve une construction de ces fonctions ψ_d dans Schwartz [1] tome 1 p. 93-94). $J^m(F)$ est donc l'adhérence de l'idéal des fonctions de $\mathfrak{D}^m(K)$ dont le support est disjoint de F .

quotient. On désignera par $q_F^m(\dot{f})$ la borne inférieure des normes des fonctions de $\mathfrak{D}^m(K)$ qui prolongent l'élément $\{f\} \in W^m(F)$.

Le calcul de $q_F^m(\dot{f})$ pose un problème extrémal ardu: celui-ci n'est même pas résolu lorsque F est un ensemble fini. M. Favard a posé un problème très voisin (cf. Favard [1]) qu'il n'a résolu que dans le cas $n = 1$. On sait que la norme quotient d'un espace de Banach est une norme d'espace complet sur ce quotient. Il s'ensuit que la norme $q_F^m(\dot{f})$, moins maniable que la norme $\|\cdot\|_F^m$ est bien plus importante que celle-ci.

c) La norme la plus importante, sur $W^m(F)$, est la norme

$$(2.3) \quad \|\dot{f}\|_F^m = \text{Max} \left\{ \frac{1}{k!} \|D_M^k \dot{f}\|, \|\Delta_{M,N}^k \dot{f}\| \right\} \quad 0 \leq k \leq m \text{ et } M, N \in F.$$

C'est la norme de la convergence uniforme sur l'ensemble des distributions fondamentales.

Pour un champ W-taylorien $\{f\}$ la norme $\|\dot{f}\|_F^m$ est aisée à calculer (ou à majorer). Et de plus, elle rend $W^m(F)$ complet:

Théorème 1. L'espace $W^m(F)$ est complet lorsqu'on le norme à l'aide de $\|\cdot\|_F^m$. Les normes q_F^m et $\|\cdot\|_F^m$ sont uniformément équivalentes lorsque F décrit l'ensemble des parties fermées de K . (Nous entendons par là qu'il existe une constante Γ , ne dépendant ni de $\{f\}$ ni de F (elle ne dépend que de n, m et du diamètre d de K) telle que

$$(2.4) \quad \frac{1}{\Gamma} \|\dot{f}\|_F^m < q_F^m(\dot{f}) < \Gamma \|\dot{f}\|_F^m.$$

A) Nous allons d'abord donner une démonstration de la première assertion, qui n'utilise que le théorème du prolongement de Whitney sans s'appuyer sur nos compléments du Chap. I.

Soit $\{f\}_i$ une suite de Cauchy de $W^m(F)$, pour la norme $\|\cdot\|_F^m$. Par définition de cette norme les $D_M^k f_i$ convergent uniformément sur F vers une fonction continue, que nous appellerons $d^k f$. Les $d^k f$ définissent un champ taylorien d'ordre m .

Mais les fonctions $\frac{D_M^k f_i - T_N^k f_i}{\|MN\|^{m-k}}$ convergent uniformément sur $F \times F$, vers une fonction continue $\Phi^k(M, N)$ nulle sur la diagonale de $F \times F$. Par ailleurs cette fonction est égale à

$$\frac{d_M^k f - T_N^k f(M)}{\|MN\|^{m-k}} = \Phi^k(M, N).$$

En posant $\lambda(x) = \sup \|\Phi^k(M, N)\|$ pour $k = 0, 1, \dots, m$ et $\|M, N\| \leq x$, et en construisant $\alpha(x)$, à partir de $\lambda(x)$ comme au Lemme 1 du Chap. I (enveloppe convexe d'un graphe), on détermine un module de continuité α tel que

$$\|d_M^k f - T_N^k f(M)\| \leq \|MN\|^{m-k} \cdot \alpha(\|MN\|).$$

Le champ taylorien défini par les $d^k f$ est bien un W -champ taylorien d'ordre m . Et il est immédiat que cet élément est la limite de la suite f_i , au sens de la norme $\|\cdot\|_F^m$. L'espace $W^m(F)$ est donc complet pour la norme $\|\cdot\|_F^m$.

Par ailleurs si $\tilde{f}$ est un prolongement quelconque de $\{f\}$, on a

$$\|\tilde{f}\|_K^m \geq \|f\|_F^m.$$

Mais, sur $\mathfrak{D}^m(K)$ les normes $\|\cdot\|_K^m$ et $\|\cdot\|_F^m$ sont équivalentes. On en déduit l'existence d'une constante C , indépendante de la forme de F telle que

$$\|\tilde{f}\|_F^m \leq C \cdot \|\tilde{f}\|_K^m.$$

En particulier :

$$(2.5) \quad \|\tilde{f}\|_F^m \leq C \cdot q_F^m(\tilde{f}).$$

La norme $\|\cdot\|_F^m$ étant moins fine que la norme quotient q_F^m , le théorème des homomorphismes de Banach prouve que ces normes sont équivalentes, mais cette première démonstration ne permet pas de conclure à l'uniforme équivalence de ces normes lorsque F varie.

B) Considérons, parmi les prolongements du champ W -taylorien, $\{\tilde{f}\}$, la fonction $\hat{f}$ construite au Chap. I (12, C).

On a évidemment

$$(2.6) \quad q_F^m(\tilde{f}) \leq \|\hat{f}\|_K^m.$$

Interprétons la formule (13.2) du Chapitre I, qui s'écrit :

$$\|\hat{f}\|_K^m \leq \|\tilde{f}\|_F^m + K \cdot d^{m-k} \cdot \alpha_f(d)$$

où α_f est un m -module de continuité quelconque de $\{\tilde{f}\}$. En particulier on peut prendre le m -module de continuité de $\{\tilde{f}\}$. Pour calculer ce m -module de continuité, on pose

$$\lambda(x) = \sup \|\Delta_{A,B}^k \tilde{f}\|$$

avec

$$k = 0, 1, \dots, m \text{ et } \|AB\| \leq \alpha.$$

Puis l'on en déduit α_f , comme au Lemme I du Chapitre I.

On en déduit $\alpha_f(d) = \lambda(d) = \sup \|\Delta_{A,B}^k \dot{f}\|$ pour $k = 0, 1, \dots, m$ et $A, B \in K$. Ainsi $\alpha_f(d) \leq \|f\|_F^m$.

En posant

$$\Gamma = \max_{k=0,1,\dots,m} (1 + K \cdot d^{m-k})$$

et en utilisant (2.5) et (2.6) il vient :

$$q_F^m(\dot{f}) \leq \dot{f} \stackrel{m}{K} \leq \Gamma \|\dot{f}\|_F^m \leq \Gamma \cdot C \cdot q_F^m(\dot{f}).$$

Comme les constantes Γ et C ne dépendent que de n, m et d et non de la forme de F , le théorème est établi.

3. Application à la théorie des distributions.

Le dual de $W^m(F) = \mathfrak{D}^m(K)/J^m(F)$ est le sous-espace de $(\mathfrak{D}^m(K))'$ orthogonal à $J^m(F)$. C'est le sous-espace de $(\mathfrak{D}^m(K))'$ formé des distributions d'ordre $\leq m$, à support dans F .

Notre théorème I permet d'améliorer l'énoncé de divers résultats du traité de M. Schwartz [1], relatifs à la structure des distributions à support compact.

Ainsi :

Proposition II. Pour toute distribution T d'ordre m à support compact F , les $T(\varphi_i)$ convergent vers 0, dès que les φ_i convergent uniformément sur l'ensemble des distributions fondamentales ponctuelles et biponctuelles d'ordre m de support contenu dans F .

Cet énoncé a l'avantage de ne pas faire intervenir le comportement des φ_i dans un voisinage de $F^{(2)}$.

D'autre part :

Proposition III. Toute distribution d'ordre m à support compact F est limite faible d'une suite de distributions d'ordre m à support fini et contenu dans F .⁽³⁾

En effet, soit $A \subset (W^m(F))'$ l'ensemble des distributions fondamentales d'ordre m . Par définition, son polaire A° dans $W^m(F)$ est la boule unité de $W^m(F)$ pour la norme $\|\cdot\|_F^m$.

2. Comparer aux théorèmes XXIV et XXXIV du Chap. III de L. Schwartz [1].

3. Cf. L. Schwartz [2].

Donc $A^{\circ\circ}$, qui est l'enveloppe convexe faiblement fermée de A (cf. EVT Chap. IV, § 1, Prop. 3), est la boule unité de $(W^m(F))'$ associée à la norme $\|\cdot\|_F^m$ sur $W^m(F)$.

Comme cette boule unité $A^{\circ\circ}$ est faiblement métrisable, toute distribution T d'ordre $\leq m$ et à support dans F peut être approchée par une suite (et non un filtre) de combinaisons linéaires de distributions fondamentales (ponctuelles ou bipoctuelles) à support dans F , c'est à dire par une suite de distributions du même ordre à support fini.

4. Ensembles de type C_m .

Définition. Un compact $F \subset K$ est de type C_m , si les normes $\|\cdot\|_F^m$ et $\|\cdot\|_F^m$ sont équivalentes sur $W^m(F)$.

D'après le théorème de Banach, pour que F soit de type C_m , il faut et il suffit que $W^m(F)$ soit complet pour la norme $\|\cdot\|_F^m$.

La Proposition IV ci-dessous fournit une autre caractérisation des ensembles de type C_m . Cette caractérisation fait intervenir les parties relativement compactes de $W^m(F)$.

Considérons d'abord un F fermé $\subset K$ quelconque. Toute partie compacte de $W^m(F)$ reste compacte lorsqu'on la munit de la topologie moins fine induite par la norme $\|\cdot\|_F^m$. En appliquant le théorème d'Ascoli, on peut énoncer :

"Pour qu'une partie $\mathfrak{B}$ de $W^m(F)$ soit relativement compacte, il est nécessaire qu'elle satisfasse à la propriété β_1 suivante :

$\beta_1)$ $\mathfrak{B}$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|_F^m$, et pour chaque $k \leq m$, l'ensemble $D^k(\mathfrak{B})$ des fonctions $D^k f$, où $\{f\}$ parcourt $\mathfrak{B}$, est un ensemble équicontinu."

A fortiori il est nécessaire que $\mathfrak{B}$ satisfasse à la propriété plus faible suivante :

$\beta_2)$ $\mathfrak{B}$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|_F^m$, et l'ensemble des fonctions $D^m \dot{f}$, où $\{\dot{f}\}$ parcourt $\mathfrak{B}$, est équicontinu.

Proposition IV. Il y a équivalence entre les trois assertions suivantes :

a) F est de type C_m .

b) Pour qu'une partie $\mathfrak{B}$ de $W^m(F)$ soit relativement compacte il faut et il suffit que $\mathfrak{B}$ satisfasse β_1 .

c) Pour que $\mathfrak{B}$ soit relativement compacte il faut et il suffit que $\mathfrak{B}$ satisfasse à β_2 .

a) implique c). Supposons F de type C_m , et soit $\mathfrak{B}$ une partie fermée de $W^m(F)$ satisfaisant à β_2 .

Comme $\mathfrak{B}$ est borné pour la norme $\|\cdot\|_F^m$ supposée équivalente à $\|\cdot\|_F^m$ $\mathfrak{B}$ est aussi borné pour la norme quotient q_F^m . Il est donc possible de prolonger les $\{f\} \in \mathfrak{B}$ en des fonctions $\hat{f} \in \mathfrak{D}^m(K)$ de sorte que l'ensemble de tous ces prolongements soit borné dans $\mathfrak{D}^m(K)$. Or le fait que l'ensemble des $D^{k+1}\hat{f}$ soit borné entraîne l'équicontinuité des $D^k\hat{f}$ sur K , pour $k < m$, et à fortiori l'équicontinuité des $D^k\hat{f} = D^k f$ sur F . Nous venons donc de montrer que lorsque F est de type C_m , la propriété β_2 entraîne la propriété β_1 .

D'après le théorème D'Ascoli, les parties de $W^m(F)$ qui satisfont à β_1 sont précompactes, lorsqu'on les munit de la distance induite par la norme $\|\cdot\|_F^m$. Ainsi, lorsque F est de type C_m , la propriété β_2 implique la précompacité pour la norme $\|\cdot\|_F^m$ équivalente à $\|\cdot\|_F^m$ donc la compacité relative (car $W^m(F)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_F^m$). Nous avons bien montré que a) implique c).

Il est évident que c) implique b).

Enfin b) implique a). Car b) entraîne que toute partie de $W^m(F)$ compacte pour la norme $\|\cdot\|_F^m$, (et satisfaisant par conséquent à β_1) est également compacte pour la norme $\|\cdot\|_F^m$. Les deux normes définissent sur $W^m(F)$ les mêmes parties compactes, par conséquent les mêmes suites convergent vers 0 : bref, les mêmes topologies. F est de type C_m .

Corollaire. Tout ensemble de type C_m est de type I_m et I_m^k . En particulier un ensemble de type C_m n'a qu'un nombre fini de composantes connexes (cf. Chap. II (8.1)).

Sinon, le sous-espace de $W^m(F)$ formé des champs W -tayloriens dont la dérivée $m^{\text{ème}}$ est nulle, serait de dimension infinie. La boule unité de $W^m(F)$ pour la norme $\|\cdot\|_F^m$ couperait le sous-espace précédent suivant un ensemble non compact, qui satisferait cependant à la propriété β_2 . Voici une autre caractérisation :

Proposition V. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit de type C_m , est qu'il soit de

type I_m^m , et que l'application $\{\dot{f}\} \rightarrow D^m f$ de $W^m(f)$ dans $\mathcal{C}(F, L(\odot E, R))$ (espace des applications continues de F dans $L(\odot E, R)$) soit un homomorphisme.

1) La condition est nécessaire. Si F est de type C_m , nous venons de voir qu'il est de type I_m^m , ce qui signifie que le noyau de l'application D^m est de dimension finie. Ce noyau possède un supplémentaire topologique S dans $W^m(F)$. L'application D^m restreinte à S est biunivoque. Nous allons montrer, par l'absurde, que l'application réciproque est continue. Si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver une suite d'éléments de S $\{\dot{f}_i\}$ tels que $\|f_i\|_F^m$ tende vers l'infini, alors que $D^m f_i$ reste borné.

Posons $\{\dot{g}_i\} = \{\dot{f}_i\} / \|\dot{f}_i\|_F^m$. La suite d'éléments $\{\dot{g}_i\}$ est relativement compacte d'après la Proposition IV. On en déduit, à la limite, l'existence d'un élément $\{\dot{g}\}$ de S possédant les propriétés contradictoires suivantes : d'une part on a $\|\dot{g}\|_F^m = 1$ (ce qui implique $\{\dot{g}\} \neq 0$) d'autre part $D^m g = 0$, ce qui implique $\{\dot{g}\} = 0$, car $\{\dot{g}\} \in S$ (et que l'application D^m restreinte à S est biunivoque).

2) Inversement si F est de type I_m^m et si l'application D^m est un homomorphisme, alors $W^m(F)$ est somme directe d'un sous-espace fermé S , isomorphe à un sous-espace de $\mathcal{C}(F, L(\odot E, R))$, et d'un espace de dimension finie N . La topologie de S peut être définie par la norme qui à $\{\dot{f}\}$ fait correspondre $\|D^m f\|_F^o$, cette topologie est donc moins fine que la topologie définie par $\|\cdot\|_F^m$. Sur N les normes $\|\cdot\|_F^m$ et $\|\cdot\|_F^m$ induisent la même topologie.

La topologie de $W^m(F)$ est donc moins fine (et par conséquent équivalente à la topologie définie par $\|\cdot\|_F^m$. F est bien de type C_m .

Dans le cas $m = 1$, il existe une caractérisation ne faisant intervenir que des éléments géométriques :

Proposition VI. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble F soit de type C_1 est qu'il soit réunion d'un nombre fini d'ensembles réguliers au sens de Whitney (cf. Définition à la fin du Chap. II).

M. Whitney avait déjà montré que la condition est suffisante ([4]) (Grâce à la condition de régularité, on peut majorer un prolongement de $\{\dot{f}\}$ en fonction de $\|\dot{f}\|_F^m$, ce qui implique l'équivalence de $\|\cdot\|_F^m$ et de q_F^m .) Examinons la réciproque.

1) Pour cela, montrons par l'absurde que si F connexe est de type C_1 il est nécessairement connexe par arcs rectifiables, et de diamètre géodésique borné.

S'il n'en était pas ainsi, à tout nombre K "très grand" donné à l'avance on pourrait faire correspondre une distance ρ telle que le diamètre géodésique D du ρ -voisinage de F dépasse $K \cdot d$ (où d est le diamètre euclidien de F). Choisissons un point A quelconque dans F , et envisageons la fonction $f(M) = \widehat{AM}$ définie sur le ρ -voisinage de F et égale à la distance géodésique de A à M , dans ce ρ -voisinage.

Nous allons montrer que la restriction de $f(M)$ au $\rho/2$ -voisinage de F est lipschitzienne (pour la métrique euclidienne):

Pour étudier le rapport $\frac{|f(M) - f(N)|}{\|MN\|}$ distinguons deux cas. Ou bien, $\|MN\| > \rho/2$. Alors ce rapport est majoré par $2D/\rho$ et la borne supérieure de ce rapport est certainement minorée par $D/2d$, (car il existe certainement un point M , tel que $|f(M)| \geq D/2$). Donc

$$\frac{|f(M) - f(A)|}{\|AM\|} \geq \frac{D}{2\|AM\|} \geq \frac{D}{2d}.$$

Ou bien, $\|MN\| < \rho/2$. Comme M est supposé situé dans un $\rho/2$ -voisinage de F il existe un point m de F tel que $\|Mm\| \leq \rho/2$; d'où $\|mN\| < \rho$. Les points M et N étant situés dans une même boule de rayon ρ centrée sur F , il s'ensuit que M et N peuvent être joints par un segment de droite entièrement situé dans le ρ -voisinage de F . Par suite

$$\frac{|f(M) - f(N)|}{\|MN\|} \leq \frac{\|MN\|}{\|MN\|} = 1.$$

On a choisi K de façon à ce que $D/2d$ soit beaucoup plus grand que 1, on voit que la fonction $f(M)$ possède un coefficient de Lipschitz très grand, mais que la restriction de f , à tout ensemble du $\rho/2$ -voisinage de F de diamètre $\leq \rho/2$ admet un coefficient de Lipschitz ≤ 1 .

C'est, comme nous allons maintenant le montrer, l'existence de fonctions sur F admettant un coefficient de Lipschitz aussi grand que l'on veut, mais admettant un coefficient de Lipschitz "local" borné, qui caractérise les ensembles qui ne sont pas de type C_1 . Régularisons maintenant la fonction $f(M)$ (cf. Schwartz [1] Chap. VI) à l'aide d'une fonction régularisante $\vartheta \in \mathcal{D}'(K)$ dont le support a un diamètre négligeable devant $\rho/2$. Rappelons

que la régularisation conserve approximativement la coefficient de Lipschitz local.⁽⁴⁾ Il s'ensuit que la fonction $h = f * \vartheta$ est une fonction 1-fois continûment dérivable définie dans le $\rho/4$ -voisinage de F , telle que $\|D^1 \dot{h}\|$ soit majoré par un nombre légèrement supérieur à 1, (et en tout cas par 2), alors que $\|h\|_F^\circ$ qui est voisin de $\|f\|_F^\circ$ est minoré par $D/4$. En faisant tendre la constante K vers l'infini (ce qui implique que ρ tend vers 0), et en prenant une suite de régularisantes ϑ tendant vers la masse de Dirac, on construit une suite de champs W -tayloriens $\{h_i\} \in W^1(F)$ dont la première composante s'annule au point A ; de plus $\|h_i\|_F^1 \rightarrow \infty$ alors que $\|D^1 h_i\|$ reste borné. D'après la Proposition V, F ne saurait être de type C_1 .

2) Montrons maintenant que si F est de type C_1 , F est non seulement de diamètre géodésique borné, mais aussi régulier au sens de Whitney. On raisonne par l'absurde, et l'on construit, ici encore, les mêmes champs- W -tayloriens h_i que dans le 1). En supposant F de diamètre géodésique borné, les $\|h_i\|_F^1$ sont maintenant bornés. Mais si F n'était pas régulier au sens de Whitney, la borne supérieure de $\frac{|h_i(M) - h_i(N)|}{\|MN\|}$ (M et $N \in F$) tendant vers l'infini lorsque $i \rightarrow \infty$. Nous aurions ainsi une suite de champs W -tayloriens d'ordre 1, bornée pour la norme $\|\cdot\|_F^1$ mais non bornée pour la norme $\|\cdot\|_F^1$. Donc F n'est pas de type C_1 .

5. Algèbres de Whitney semi-simples.

La transformation de Gelfand sur une algèbre de Whitney consiste à remplacer le champ W -taylorien $\{f\}$, par la fonction

$$M \rightarrow f(M) = D_M^\circ f.$$

La connaissance de la première composante d'un champ W -taylorien $\{f\}$

4. En effet, soit $\vec{V}$ un vecteur tel que $\|\vec{V}\| \leq \rho/4$. Remarquons que $\frac{h(M+\vec{V}) - h(M)}{\|\vec{V}\|}$ est le produit de composition de h par la distribution $\frac{\delta_{\vec{V}} - \delta_0}{\|\vec{V}\|}$.

$$\text{Or,} \quad \frac{\delta_{\vec{V}} - \delta_0}{\|\vec{V}\|} * (f * \vartheta) = \left(\frac{\delta_{\vec{V}} - \delta_0}{\|\vec{V}\|} * f \right) * \vartheta$$

et la parenthèse du second membre est $\frac{f(M+\vec{V}) - f(M)}{\|\vec{V}\|}$ qui est majoré par le coefficient de Lipschitz local (ici 1) de f .

ne suffit pas en général à déterminer les autres composantes. Une algèbre de Whitney n'est pas en général semi-simple.

Nous dirons avec M. Mackey ([1] p. 119) qu'un ensemble F est antiprimaire si toute fonction $f \in \mathfrak{D}^m(K)$ qui s'annule sur F a nécessairement toutes ses dérivées nulles sur F (Exemple: l'adhérence d'un ouvert. Par contre un ensemble fini n'est pas antiprimaire).

La caractérisation des compacts antiprimaires est équivalente à la caractérisation des algèbres de Whitney semi-simples.

Théorème 2. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble F soit antiprimaire est qu'en chaque point de F , la dimension du ptgl^1 soit égale à n (dimension de R^n).

La condition est suffisante: En vertu du Corollaire 1 de la Prop. VIII du Chap. II toute fonction de $\mathfrak{D}^m(K)$ qui s'annule sur F a sa dérivée première nulle sur F . Cette dernière est une fonction $m-1$ fois continûment dérivable (à valeurs dans le dual de E); sa dérivée première (dérivée seconde de la précédente) s'annule donc sur F etc... Toutes ses dérivées s'annulent sur F .

Nous donnerons deux démonstrations distinctes de la réciproque.

1) Démonstration basée sur la Proposition VIII du Chap. I.

Supposons qu'au point $A \in F$, le $\text{ptgl}^1(A)$ ait une dimension strictement inférieure à n . Soit $\vec{V}$ un vecteur n'appartenant pas au $\text{ptgl}^1(A)$. Il existe alors une fonction g 1-fois continûment dérivable qui s'annule sur F (au voisinage de A) et telle que $D_A^1 g[\vec{V}] \neq 0$ (définition du ptgl^1). g étant une fonction de type $(1, 1)$, la Proposition VIII du Chap. I permet d'en déduire un champ W -taylorien d'ordre m de type (m, m) en "multipliant" g m -fois par elle-même. De façon précise, le champ taylorien h défini par

$$D^k h = 0, \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

et $D_M^m h[\odot \vec{U}] = (D_M^1 g[\vec{U}])^m$ pour tout vecteur $\vec{U}$ de E , est W -taylorien d'ordre m . Or $D^0 h = 0$ au voisinage de A .

En multipliant h par une fonction de $\mathfrak{D}^m(K)$ égale à 1 sur un voisinage de A et dont le support est un voisinage convenable de A , on obtient un élément de $W^m(F)$ non nul (car $D^1 g \vec{V} \neq 0$) et appartenant au radical de $W^m(F)$. F n'est donc pas semi-simple.

2) La seconde démonstration est basée sur la Proposition IX du Chap. I.

Dire que le $\text{ptgl}^1(A)$ a une dimension strictement inférieure à n , c'est dire qu'il existe une immersion locale en A 1-fois continûment dérivable à $n-1$ dimension. Cela implique l'existence d'une transformation régulière 1-fois continûment dérivable d'un voisinage de A dans R^n , telle que les points de F appartenant à ce voisinage aient leurs images situées dans un hyperplan H .

Étant donné un hyperplan H il est possible de définir un champ W -taylorien $\{\dot{f}\}$ d'ordre m de la façon suivante:

On pose $D^k f = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Si $\vec{N}$ est le vecteur normal à H , et $\vec{V}_i$ des vecteurs appartenant à H on pose $D^m f [\odot \vec{N}] = 1$ et

$$D^m f [\odot \vec{N} \odot \vec{V}_1 \odot \vec{V}_2 \dots \odot \vec{V}_{m-k}] = 0 \quad \text{si } k \neq m.$$

On vérifie immédiatement que l'on a bien ici un champ W -taylorien d'ordre m , car parmi les formules (W) toutes se réduisent à $0 = 0$ sauf la dernière qui exprime la continuité de $D^m f$, et qui est évidente.

Le champ W -taylorien $\{\dot{f}\}$ ainsi construit est de type (m, m) . Nous allons le composer avec la transformation 1-fois continûment dérivable qui est l'application réciproque de l'application qui envoie le voisinage considéré de F dans H .

La Proposition IX montre alors qu'en composant le champ W -taylorien $\{\dot{h}\}$ avec cette transformation 1-fois continûment dérivable, on obtient un champ W -taylorien d'ordre m défini sur un voisinage de A de F , et tel que sa transformée de Gelfand soit nulle, sans que l'élément lui-même ne soit nul. La réciproque du Théorème II est ainsi établie. Nous avons démontré en fait, un résultat plus fort que le Théorème II, à savoir:

Théorème 2 bis. Pour tout vecteur $\vec{V} \notin \text{ptgl}^1(A)$, il existe $\{\dot{h}\} \in W^m(F)$ tel que $D_M^k \dot{h} = 0$ pour $M \in F$ et $k < m$, et $D_A^m \dot{h} [\odot \vec{V}] \neq 0$.

Remarques. Prenons pour F une courbe de R^2 strictement une fois continûment dérivable. Toute fonction 2 fois continûment dérivable qui s'annule sur F a ses dérivées premières nulles sur F , mais pas forcément ses dérivées secondes. Il en résulte que le radical de $W^m(F)$ n'est formé que d'éléments de type (m, m) .

Cela montre que les constructions d'apparence compliquée nécessitant une synthèse d'éléments m -fois continûment dérivables à partir de fonctions qui ne sont qu'une fois continûment dérivables, sont inéluctables. Cela explique aussi l'intervention paradoxale du ptgl^1 (et non du ptgl^m) dans une question concernant $W^m(F)$.

Cette remarque peut être précisée comme suit :

Supposons que $F \subset R^2$ soit le graphe d'une fonction φ strictement 1-fois continûment dérivable. Le Théorème 2 bis affirme l'existence d'une fonction $\Phi \in \mathfrak{D}^m(K)$, dont toutes les dérivées d'ordre $\leq m$ s'annulent sur F , et telle que la dérivée m ème ne s'annule en aucun point de F . On peut choisir Φ de façon qu'elle ne s'annule en aucun point de K n'appartenant pas à F . Considérons l'idéal fermé de $\mathfrak{D}^m(K)$ engendré par Φ . Cet idéal a les mêmes idéaux ponctuels que $I^m(F)$ (il y a en effet une inclusion, évidente, entre ces idéaux ponctuels, qui sont tous deux de dimension 1). D'après le théorème spectral de Whitney ([6]), ces idéaux sont les mêmes.

Or il est intéressant de noter que si f est une fonction continue définie sur F , et ne s'annulant en aucun point de F , on obtient un champ W -taylorien en posant $D_M^k \psi = 0$ si $k < m$, et $D_M^m \psi = f(M) \cdot D_M^m \Phi$.

En effet, la k ème condition (W) consiste à majorer $D_M^k \psi - T_A^k \psi(M)$ qui se réduit ici à $\frac{-1}{(m-k)!} \cdot f(A) \cdot D_A^m \Phi [\overset{k}{\odot} \overset{\rightarrow}{AM}]$: la majoration résulte alors de la majoration analogue pour $D_A^m \Phi [\overset{k}{\odot} \overset{\rightarrow}{AM}]$.

Inversement soit ψ un autre générateur du radical de $W^m(F)$. Comme $D_A^m \Phi$ et $D_A^m \psi$ sont deux formes linéaires sur $\overset{m}{\odot} E$ qui s'annulent sur le même hyperplan, il en résulte qu'il existe une constante, que nous noterons $f(A)$ telle que $f(A) \cdot D_A^m \Phi = D_A^m \psi$.

Plus précisément, si $\vec{N} \notin \text{ptgl}^1(A)$ et si $\vec{V}_1, \vec{V}_2 \dots \vec{V}_i \in \text{ptgl}^1(A)$ alors $D_A^m \Phi [\overset{k}{\odot} \vec{N} \odot \vec{V}_1 \odot \vec{V}_2 \dots \vec{V}_{m-k}] = D_A^m \psi [\overset{k}{\odot} \vec{N} \odot \vec{V}_1 \odot \vec{V}_2 \dots \vec{V}_{m-k}] = 0$ pour $k < m$.

Il est immédiat que la fonction $M \rightarrow f(M)$ est continue sur F , car $D_M^m \psi$ l'est. Nous avons ainsi démontré, que tout élément du radical de $W^m(F)$ peut se mettre sous la forme précédemment décrite pour ψ . On en déduit que ce radical est un $C(F)$ -module ($C(F)$ est l'espace des fonctions continues sur F) et en appliquant le théorème des homomorphismes de Banach, on constate que le radical de $W^m(F)$ est isomorphe à $C(F)$.

Supposons que le m -module de continuité de Φ soit α (non nul); alors tout autre générateur $\psi = f \times \Phi$ du radical ne peut avoir un m -module de continuité négligeable devant α . Il suffit d'étudier le module de continuité de $f(M)$. $D_M^m \Phi$ conformément à la Proposition (2,1) du Chapitre I.

2) Une courbe de R^2 n'ayant de tangente en aucun point est un ensemble antiprimaire. En réponse à une question de M. Mackey, nous pouvons affirmer que l'intersection de deux ensembles antiprimaires n'est pas forcément antiprimaire (deux courbes peuvent se couper en un seul point).

3) Il est remarquable que les ensembles antiprimaires sont indépendants de m . Par contre, si l'on passe à l'algèbre de Fréchet $W^\infty(F)$ des éléments indéfiniment dérivables, alors la situation change; en effet:

Proposition VII. La condition nécessaire et suffisante pour que $W^\infty(F)$ soit semi-simple, est que $\dim(\text{ptgl}^\infty)$ soit égal à n en tout point de F .

En effet, si $\{f\}$ est un élément de $W^\infty(F)$ appartenant au radical, alors il existe un point A et un indice de dérivation k tel que $D^k f$ s'annule sur F , sans que $D^{k+1} f$ ne s'y annule identiquement.

Le théorème des fonctions implicites fournit alors une immersion locale indéfiniment dérivable de F en un point au moins, à $n - 1$ dimensions.

La réciproque est évidente, par définition du ptgl^∞ .

Remarque. L'opposition entre la situation du Théorème 2 et de la Proposition VII, nous suggère l'exemple suivant, qui n'est pas sans rapport avec une question posée par M. E. A. Michael dans sa thèse ([1] p. 27). Soit F une variété strictement 1-fois continûment dérivable à $n - 1$ dimensions. Considérons l'algèbre de Fréchet, $W^\infty(F)$, dont la topologie peut être définie par la famille des normes $\| \cdot \|_F^m$. L'algèbre $W^\infty(F)$ est semi-simple. Mais pour chaque m , le complété de $W^\infty(F)$ pour la norme n'est pas semi-simple.

La question de M. E. A. Michael était la suivante: "Étant donnée une algèbre topologique (localement multiplicativement convexe) semi-simple, peut-on définir sa topologie, par une famille de semi-normes, telles que les algèbres de Banach associées à chacune des semi-normes soient semi-simples?"

Notre exemple ne fournit pas une réponse négative à cette question, car on peut aussi définir la topologie de $W^\infty(F)$ à l'aide d'une autre famille de normes: à savoir la famille des normes quotients de $W^m(F)/R_m$

où R_m est le radical de $W^m(F)$. En effet, le radical de $W^m(F)$ n'est constitué que de champs W -tayloriens de type (m, m) . Il en résulte que la norme quotient de $W^m(F)/R_m$ est comprise entre les normes $\| \cdot \|_F^m$ et $\| \cdot \|_F^{m-1}$. Ainsi les deux systèmes de normes définissant la topologie de $W^\infty(F)$, sont bien équivalents (B. EVT Chap. II cor. de la Proposition 9 du § 5).

6. Supplémentaires topologiques.

La proposition qui suit n'est qu'une nouvelle façon d'exprimer le théorème du prolongement.

Proposition VI. Dans $\mathfrak{D}^m(K)$, (m fini), tout idéal du type $J^m(F)$ possède un supplémentaire topologique.

En effet, la méthode de prolongement de M. Whitney consiste précisément à construire un opérateur de prolongement Π

$$\{\dot{f}\} \rightarrow \sum u_i(M) T_{A_i} \dot{f}(M) = \Pi(\dot{f}) = \hat{f}$$

qui est un "inverse à droite" pour l'application canonique de $\mathfrak{D}^m(K)$ sur le quotient $W^m(F)$. (Cf. B. EVT Chap. I § 1 Proposition 13).

L'opérateur transposé possède la particularité suivante : il applique l'ensemble des distributions à support ponctuel dans l'ensemble des distributions dont le support ne comprend au plus que N points (N est la constante ne dépendant essentiellement que de n , dimension de R^n , et qui intervient au 3° de la définition du recouvrement standard (cf. Chap. I).

Remarques. 1) Dans le cas $m=0$, M. Kakutani a démontré le théorème suivant : "Si K est un espace métrique, et si F est un fermé de K , dont la frontière est séparable, alors l'idéal des fonctions continues s'annulant sur F possède un supplémentaire topologique dans $C(K)$ ". (Cf. Grothendieck [1] p. 27). La méthode de M. Kakutani est analogue à celle de M. Whitney.

2) La proposition est inexacte pour $m=\infty$. Il suffit de prendre F réduit à un seul point A . On démontre que le quotient $\mathfrak{D}^\infty(K)/J^\infty(\{A\})$, identique à l'espace de toutes les suites numériques (th. d'E. Borel) est un espace de Fréchet, dont la topologie est définie par une suite de semi-normes dont aucune n'est une véritable norme. Comme l'espace de Fréchet $\mathfrak{D}^\infty(K)$ n'a pas la même propriété, c'est que $J^\infty(\{A\})$ n'admet pas de supplémentaire topologique dans $\mathfrak{D}^\infty(K)$ (Cf. Grothendieck [1] p. 164, Exerc. 2).

Nous nous proposons maintenant d'examiner si un idéal I de $\mathfrak{D}^m(K)$

peut admettre une sous-algèbre S comme supplémentaire topologique. Voici d'abord une proposition générale :

Proposition VIII. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative avec unité e , dont le spectre K est connexe. Si $\mathcal{A}$ est somme directe topologique d'un idéal I et d'une sous-algèbre S , alors $e \in S$, la projection canonique p de $\mathcal{A}$ sur S est un homomorphisme d'algèbre de Banach et le spectre de S est un rétracte de K (cf. B TG Chap. IX § 4 Exerc. 15).

a) Il existe par hypothèse un isomorphisme canonique ϑ de l'espace de Banach $\mathcal{A}/I$ sur S . Le transposé de cet isomorphisme permet d'identifier le dual de S au dual de $\mathcal{A}/I$, lui-même identifié à I° (orthogonal de I dans $\mathcal{A}'$). La topologie faible de S est $\sigma(S, I^\circ)$. Considérons le projecteur p de $\mathcal{A}$ sur S , comme une application fortement continue de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$; il possède alors un transposé ${}^t p$ qui est une application faiblement et fortement continue (B EVT Chap. IV § 4 cor. de la Proposition 6) de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}'$. $\mathcal{A}'$ est somme directe topologique de I° et S° (qui sont respectivement l'image et le noyau de ${}^t p$).

b) p n'est pas seulement un homomorphisme d'espace de Banach de $\mathcal{A}$ sur S mais aussi un homomorphisme d'algèbre. En effet, si f et $g \in \mathcal{A}$, on a

$$fg = \{p(f) \cdot p(g)\} + \{(f - p(f)) \cdot g + p(f)(g - p(g))\}.$$

L'unicité de la décomposition de l'élément fg en somme d'éléments appartenant respectivement à S et I , implique que $p(fg) = p(f) \cdot p(g)$. De même ϑ est un isomorphisme d'algèbre.

c) $p(e) = p(e^2) = p(e)^2$ est un idempotent $\in \mathcal{A}$. La transformée de Gelfand de $p(e)$ est une fonction continue sur K , et ne prenant que les valeurs 0 et 1. Comme K est supposée connexe, cette transformée de Gelfand ne peut être que constante. $p(e)$ et $e - p(e)$ sont deux idempotents; et l'un des deux admet une transformée de Gelfand nulle (c'est dire qu'il appartient au radical):

Remarquons que "si un idempotent d'une algèbre de Banach appartient au radical, il est nul", car

$$\|e'\|^{1/n} = \|e'^n\|^{1/n}$$

tend vers 0, si $n \rightarrow \infty$, ce qui implique que $\|e'\| = 0$, ou encore $e' = 0$.

En définitive, ou bien $p(e) = e$; ou bien $p(e) = 0$. Or la seconde éventualité est à écarter car elle signifierait que $e \in I$ et I est un idéal. Donc $e = p(e) \in S$.

d) L'application ${}^t p$ est un projecteur faiblement continu de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}'$ dont l'image est I° et qui se réduit à l'identité sur I° . C'est donc une rétraction de $\mathcal{A}'$ sur I° . Nous allons montrer que cette rétraction induit sur le spectre de $\mathcal{A}$ (ensemble des caractères non nuls de $\mathcal{A}$) une rétraction sur le spectre F de S (identifié à une partie de I° , lui-même identifié au dual de S).

e) L'application ${}^t p$ envoie un caractère de $\mathcal{A}$ sur un caractère $\in I^\circ$, qui par restriction à S , donne un caractère de S : En effet

$$\langle fg, {}^t p(A) \rangle = \langle p(fg), A \rangle = \langle p(f), A \rangle \cdot \langle p(g), A \rangle = \langle f, {}^t p(A) \rangle \cdot \langle g, {}^t p(A) \rangle.$$

Mais inversement, tout caractère de S se prolonge trivialement en un caractère de $\mathcal{A}$ qui s'annule sur I . Il s'ensuit que l'application ${}^t p$ applique l'ensemble des caractères de $\mathcal{A}$ sur l'ensemble des caractères de S . De plus, d'après $\langle p(e), A \rangle = \langle e, A \rangle = \langle e, {}^t p(A) \rangle$, on voit qu'un caractère non nul est appliqué sur un caractère non nul. L'application induit donc sur K une rétraction ρ de K sur F .

Corollaire. Soit K un espace compact connexe et F un fermé $\subset K$. Soit $C(K)$ l'algèbre des fonctions continues définies sur K . La condition nécessaire et suffisante pour que l'idéal $J(F)$ des fonctions qui s'annulent sur F admette une sous-algèbre supplémentaire topologique est que F soit un rétracte de K .

Nous venons de voir que cette condition est nécessaire. D'après le théorème d'Urysohn, $C(F)$ est isomorphe à $C(K)/J(F)$. Supposons qu'il existe une rétraction ρ de K sur F . L'application qui à $\{f\} \in C(F)$ fait correspondre la fonction $\{M \rightarrow f(\rho(M))\} \in C(K)$ est un isomorphisme de $C(F)$, sur une sous-algèbre de $C(K)$. Cet isomorphisme conserve les normes (il est donc continu). La sous-algèbre citée est une supplémentaire topologique de $J(F)$.

Proposition IX. Pour qu'un idéal $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{D}^m(K)$ admette

une sous-algèbre S^m comme supplémentaire topologique, les conditions suivantes sont nécessaires:

1) $\mathfrak{J}$ doit être un idéal de la forme $I^m(F)$ (c'est à dire l'idéal de toutes les fonctions $\in \mathfrak{D}^m(K)$ qui s'annulent sur un fermé F de K).

2) Il doit exister une rétraction m -fois continûment dérivable et de rang constant de K sur F .

a) L'algèbre $\mathfrak{D}^m(K)$ étant semi-simple, la sous-algèbre S^m doit l'être également: en effet, l'appartenance au radical, pour $f \in \mathfrak{D}^m(K)$, ou pour $f \in S^m$, s'exprime par la même condition:

$$\|f^n\|^{1/n} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty.$$

L'idéal $\mathfrak{J}$ doit être maximal parmi les idéaux de même spectre. Ce ne peut être qu'un idéal $I^m(F)$.

b) D'après la Proposition VIII, la restriction à K de ${}^t p$ (transposée de l'application canonique p de $\mathcal{A}$ sur S) est une rétraction de K sur F . De plus, $p(f)(M) = f(\rho M)$. Comme cette application $f \mapsto f \circ \rho$ est un homomorphisme de $\mathfrak{D}^m(K)$ dans lui-même, c'est que ρ est une application m -fois continûment dérivable.

c) Soit A un point de K . La projection p applique l'idéal $I^m(\{A\}) \subset \mathfrak{D}^m(K)$ sur l'idéal de S^m formé des fonctions $\in S^m$ qui s'annulent au point $\rho(A)$. En étudiant la puissance m -ième de $I^m(\{A\})$, on trouve de même que $J^m(\{A\})$ est appliqué dans l'idéal des fonctions de $S^m(F)$ qui s'annulent ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m$ au point $\rho(A)$.

De plus p se réduit sur S^m à l'application identique: donc $S^m \cap J^m(\{A\})$ est appliqué sur $S^m \cap J^m(\{A\})$ et $J^m(\{A\})$ est appliqué sur $S^m \cap J^m(\{A\})$. Il s'ensuit que ${}^t p$ applique l'ensemble des distributions de support ponctuel A , sur l'ensemble des distributions de support $\rho(A)$ et qui appartiennent au dual $(I^m(F))^\circ$ de $S^m(F)$.

En particulier l'ensemble des distributions du premier ordre en A assimilées à des vecteurs liés au point A s'appliquent sur l'ensemble des distributions du premier ordre de support $\rho(A)$, orthogonales à $I^m(F)$. Cet ensemble est le $\text{ptgl}^m(\rho(A))$ (Chap. II Prop. VIII). Ainsi la différentielle de ρ en A est une application linéaire de R^n sur $\text{ptgl}^m(\rho(A))$: le rang de ρ au point A est donc égal à la dimension $d_m(\rho(A))$ du $\text{ptgl}^m(\rho(A))$.

d) Lorsque M décrit F la fonction $d_m(M)$ est semi-continue supérieurement (Chap. II Prop. II).

Mais d'autre part pour une application différentiable quelconque le rang en un point est toujours une fonction semi-continue inférieurement de ce point. Donc la fonction $d_m(M)$ est continue sur F . F est connexe: c'est un rétracte de K . Donc $d_m(M)$ reste constante sur F . Le rang de l'application ρ est donc une constante k sur K .

Remarque. On peut en déduire encore d'autres propriétés de F . En chaque point de K strictement intérieur à K , F est une variété m -fois continûment dérivable, comme image d'une variété à n dimensions par une application de rang constant. En tant que rétracte de K , F est simplement connexe. ⁽⁵⁾

Considérons maintenant, pour tout $A \in F$, l'ensemble $\rho^{-1}(A)$. C'est une variété de dimension $n-k$. L'ensemble K apparaît comme une variété feuilletée (cf. Reeb [1]) du moins à l'intérieur de K . L'algèbre S^m supplémentaire de $I^m(F)$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{D}^m(K)$ formée des fonctions constantes sur les feuilles $\rho^{-1}(A)$. ⁽⁶⁾

Corollaire. Un idéal $J^m(F)$ n'admet jamais de sous-algèbre supplémentaire topologique (sauf si $F = K$).

En effet, d'après la Proposition IX, il serait nécessaire que

$$I^m(F) = J^m(F),$$

c'est à dire que F soit antiprimaire (En tout point $A \in F$, $d_m(A) = n$). Il devrait y avoir une rétraction m -fois continûment dérivable de rang partout égal à n de K sur F .

Nous allons en déduire que F ne peut pas avoir de point frontière A . Sinon, d'après le théorème des fonctions implicites, il existerait un voisinage de A où ρ devrait être biunivoque. A cause de la continuité de ρ on pourrait trouver un point M n'appartenant pas à F , tel

5. J'ignore si F peut présenter certaines singularités sur le bord de K .

6. Il est inexact que dans ces conditions, les feuilles soient toutes homéomorphes entre elles. Par exemple, considérons dans le plan la famille de courbes d'équation $y = \lambda \cdot \exp(-x^2)$. (λ paramètre réel). Prenons pour pavé compact K le carré, défini par $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$. Prenons pour F le côté de ce carré, d'abscisse 1. Dans ces conditions S peut être la sous-algèbre des fonctions constantes sur les courbes en cloche précédentes. Certaines de ces courbes, débordant des limites du carré, ont une trace non connexe sur K . D'autres, au contraire, ont une trace connexe. Les variétés $\rho^{-1}(A)$ ne sont donc pas homéomorphes entre elles.

que M et $\rho(M)$ appartienne à ce voisinage. Mais comme $\rho(M) \in F$, M est distinct de $\rho(M)$; cependant ces deux points ont la même image par ρ , ce qui contredit la biunivocité locale de ρ :

F n'ayant pas de point frontière, et K étant connexe, on a $F = K$.

7. Algèbres locales de dimension finie.

Soit L une algèbre locale (c'est à dire ne comportant qu'un seul idéal maximal A), commutative, avec unité e . Le corps de base sera C . L'idéal A n'est autre que l'ensemble des éléments non inversibles de L (Pour tout ce qui concerne les algèbres locales, on pourra consulter P. Samuel [1]. A. Weil [1] donne un résumé suffisant pour notre objet). Supposons L de dimension finie. Le quotient L/A est un corps de dimension finie sur C . Comme C est algébriquement clos, ce ne peut être que C lui-même. Il résulte d'un théorème de Krull (cf. Samuel [1] p. 5) qu'il existe un entier m , tel que l'idéal $A^{m+1} = \{0\}$ et que $A^m \neq \{0\}$. m s'appelle la hauteur de l'algèbre locale.

Proposition X. Toute algèbre locale du type précédent est isomorphe au quotient d'une algèbre de polynômes P par un idéal N de P . Cet idéal contient l'idéal des polynômes dont les termes de plus bas degré sont de degré $m+1$ au moins (ce dernier idéal s'appellera "l'idéal $\{m+1\}$ ").

Soit $\{x_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) une base de l'espace vectoriel A/A^2 .

Soit $x_i \in L$ un représentant de la classe x_i . Posons $e = x_0$. Tout élément de $A = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i x_i$ + un élément de A^2 . Par multiplication tout élément de $A^2 = \sum_{(i,j)} \lambda_{ij} x_i x_j$ + un élément de A^3 etc.. Tout élément de L peut s'exprimer au moins d'une manière sous forme d'un polynôme en x_i de degré m au plus.

Inversement, on définit un homomorphisme évident de l'algèbre $P[x_i]$ (Algèbre des polynômes abstraits par rapport aux indéterminées x_i) sur L . Le noyau de cet homomorphisme, qui contient l'idéal $\{m+1\}$ sera appelé l'idéal de nullité de L par rapport aux x_i .

Rappelons que le nombre maximum de termes d'un polynôme réduit de degré m , et à n indéterminées, est $N = \binom{m+n}{m}$ (en comptant le terme

constant). La dimension n de A/A^2 s'appelle la largeur de l'algèbre locale.

Définition. Nous dirons qu'une algèbre L est intacte, si l'idéal de nullité est identique à l'idéal $\{m+1\}$; (cette propriété ne dépend pas des variables x_i choisies: une algèbre intacte est à N dimensions.) Toute algèbre L est donc un quotient d'algèbre intacte.

Soit A un point de l'espace E à n dimensions. L'algèbre de Whitney $W^m(\{A\})$ est évidemment une algèbre intacte de largeur n et de hauteur m .

Dualité. Le dual de $W^m(\{A\})$ est l'espace des distributions de support A et d'ordre m . Il est isomorphe à la somme directe $\odot E = \sum_{k=0}^{k=m} \odot E$. Soient $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_n$ les éléments d'une base de l'espace vectoriel E . Il existe n éléments $\{x_i\}$ de $W^m(\{A\})$, qui engendrent $W^m(\{A\})$ en tant qu'algèbre et qui satisfont aux conditions.

$$\begin{cases} D_A^k \dot{x}_i = 0 & \text{si } k \neq 1 \\ D_A^1 \dot{x}_i [\vec{X}_j] = \delta_{ij} & (\text{symbole de Kronecker}). \end{cases}$$

Les N monômes en $\{x_i\}$ de degré $\leq m$ forment une base de $W^m(\{A\})$. Les N monômes tensoriels en X_j de degré $\leq m$ forment une base du dual de $W^m(A)$.

Si $\dot{x}^\alpha = \dot{x}_1^{\alpha_1} \cdot \dot{x}_2^{\alpha_2} \dots \dot{x}_n^{\alpha_n}$ et $\odot X = (\odot X_1) \odot (\odot X_2) \dots \odot (\odot X_n)$,

la dualité s'exprime par

$$\langle x^\alpha, \odot \vec{X} \rangle = 1 / |\beta|! D_A^{|\beta|} x^\alpha [\odot \vec{X}] = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ \frac{\beta!}{|\beta|!} & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

(α et β sont des multi-indices).

Sous-algèbres de $W^m(\{A\})$. Soit $e+x$ un élément inversible d'une algèbre locale L , de dimension finie. Son inverse est

$$e + \sum_1^m (-1)^k x^k.$$

Donc $e+x$ est inversible dans toute sous-algèbre L' de L qui contient e et x . Il en résulte que L' est aussi une algèbre locale, et que $L' \cap A$ est son unique idéal maximal, de codimension 1 dans L' . La structure de L' est donc donnée par la Proposition X. L' est engendrée par un nombre fini d'éléments y' de L . La condition nécessaire et suffisante pour qu'un

élément de L' (représentable d'une infinité de façons par un polynôme en y_i) soit nul, est qu'il soit nul dans L .

Problème. Caractériser les sous-algèbres (resp. idéaux) de $W^m(\{A\})$ ayant pour supplémentaire un idéal (resp. une sous-algèbre).

Passons au quotient mod. A^2 . Les générateurs de $W^m(\{A\})$ linéairement indépendants mod. A^2 dont il est question dans la Prop. X peuvent être choisis de façon à être classés en deux catégories: Les premiers (notés y_i) appartiennent à la sous-algèbre S , les seconds (notés z_j) appartiennent à l'idéal I . Il en résulte que tous les monômes qui ne contiennent que des y_i appartiennent à la sous-algèbre S . Les monômes contenant au moins un z_j appartiennent à I . Comme tous ces monômes forment une base de l'espace vectoriel $W^m(\{A\})$, on en conclut que S est engendrée en tant qu'algèbre par des éléments y_i n'appartenant pas à A^2 , et I est engendré en tant qu'idéal par les z_j . On peut donc affirmer (car les réciproques sont immédiates):

Proposition XI. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une sous-algèbre S de $W^m(\{A\})$ admette un idéal pour supplémentaire, est qu'elle soit engendrée, en tant qu'algèbre, par des éléments $\notin A^2$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal de $W^m(\{A\})$ admette une sous-algèbre pour supplémentaire, est qu'il soit engendré, en tant que $W^m(\{A\})$ -module, par des éléments $\notin A^2$.

Remarque. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de $W^m(\{A\})$ engendré par les r éléments $\{z_i\}$ appartenant à l'idéal maximal A , et linéairement indépendants mod. A^2 . Soit $\vec{V}$ un vecteur tel que $D_A^1 z_i [\vec{V}] = 0$, pour $1 \leq i \leq r$. On peut alors affirmer que pour tout $\{f_k\} \in A^k \cap \mathfrak{J}$, on a

$$D_A^p f_k [\odot \vec{V}] = 0 \quad \text{pour } 0 \leq p \leq k.$$

Cette assertion se vérifie par récurrence: elle se réduit à l'hypothèse pour $k=0$, et $k=1$.

Tout élément de $A^k \cap \mathfrak{J}$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $\{f_{k-1}\} \cdot \{a\}$, où $\{f_{k-1}\} \in A^{k-1} \cap \mathfrak{J}$ et où $\{a\} \in A$, d'après la Proposition IX.

La formule de Leibniz s'écrit:

$$D_A^k f_{k-1} \cdot a [\odot \vec{V}] = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} D_A^p f_{k-1} [\odot \vec{V}] \cdot D_A^{k-p} a [\odot \vec{V}].$$

Le second membre ne contient que des termes nuls (cela résulte soit de l'hypothèse de récurrence, soit du fait que $\{\dot{a}\} \in A$ implique $D_A^\circ \dot{a} = 0$).

8. Algèbres Wedderburniennes.

Définition. On dit qu'une algèbre est wedderburnienne, si elle est somme directe topologique de son radical et d'une sous-algèbre (nécessairement fermée).

Théorème 3. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre de Whitney $W^m(F)$ soit wedderburnienne est que F soit réunion d'un nombre fini d'ensembles fermés, sur chacun desquels la dimension du ptgl^m (notée d_m) reste constante et égale à d_1 .

Montrons d'abord que la condition précédente est nécessaire.

a) Supposons $W^m(F)$ wedderburnienne: tout champ W -taylorien $\{\dot{f}\}$ se décompose en $\{\dot{f}\} = \{\dot{f}_r\} + \{\dot{f}_s\}$ où $\{\dot{f}_r\}$ appartient au radical $R^m(F)$ et $\{\dot{f}_s\}$ à une sous-algèbre $S^m(F)$. $S^m(F)$ est semi-simple car elle est isomorphe à $W^m(F)/R^m(F)$. La transformée de Gelfand de $\{\dot{f}_r\}$ étant nulle, il en résulte que $\{\dot{f}_r\}$ et $\{\dot{f}_s\}$ ont même transformée de Gelfand (dans $W^m(F)$).

D'après la Proposition VIII, l'application $\{\dot{f}\} \rightarrow \{\dot{f}_s\}$ est un homomorphisme d'algèbres de Banach. Cette application p applique tout idéal maximal A dans $A \cap S^m(F)$.

Comme p est un homomorphisme d'algèbres il applique A^k dans $(A \cap S^m(F))^k$ qui est toujours contenu dans $A^k \cap S^m(F)$, et a fortiori dans $\overline{A^k} \cap S^m(F)$.

Par raison de continuité, p applique $\overline{A^k}$ dans $\overline{A^k} \cap S^m(F)$. Mais comme tout élément de $S^m(F)$ est sa propre image par p , on en conclut que tout élément de $\overline{A^k} \cap S^m(F)$ est l'image d'un élément de $\overline{A^k}$, par p . p applique $\overline{A^k}$ sur $\overline{A^k} \cap S^m(F)$.

b) Désignons par $\tilde{A}$ le point de F correspondant à l'idéal maximal A . Il existe un homomorphisme canonique λ_A de $W^m(F)$ sur $W^m(\{\tilde{A}\})$. Nous nous proposons de montrer que $W^m(\{\tilde{A}\})$ est somme directe de $\lambda_A(R^m(F))$, qui est un idéal, et de $\lambda_A(S^m(F))$ qui est une sous-algèbre de l'algèbre locale de dimension finie $W^m(\{\tilde{A}\})$.

Pour cela il suffit de montrer que s'il existe $\{\dot{s}\} \in S^m(F)$ et $\{\dot{r}\} \in R^m(F)$ tel que $\lambda_A(\{\dot{s}\}) = \lambda_A(\{\dot{r}\})$, alors $\lambda_A(\{\dot{s}\}) = \lambda_A(\{\dot{r}\}) = 0$.

Or, notre hypothèse signifie qu'il existe $\{\dot{j}\} \in \overline{A^{m+1}}$ tel que $\{\dot{s}\} = \{\dot{r}\} + \{\dot{j}\}$.
Ecrivons $\{\dot{j}\} = \{\dot{j}_s\} + \{\dot{j}_r\}$. D'après a) $\{\dot{j}_s\}$ et par conséquent $\{\dot{j}_r\}$ appartiennent à $\overline{A^{m+1}}$.

La décomposition $\{\dot{s}\} - \{\dot{j}_s\} = \{\dot{r}\} + \{\dot{j}_r\}$ montre que $\{\dot{s}\} - \{\dot{j}_s\} = 0$ puisque la somme $S^m(F) + R^m(F)$ est directe. Il en résulte que

$$\lambda_A(\{\dot{s}\}) - \lambda_A(\{\dot{j}_s\}) = \lambda_A(\{\dot{r}\}) = 0,$$

comme nous l'avions annoncé.

c) Nous pouvons maintenant appliquer la Proposition XI à l'algèbre locale $W^m(\{\dot{A}\})$: il existe des éléments $\{\dot{r}_i\}$ de $R^m(F)$ linéairement indépendants modulo $\overline{A^2}$ tels que $\lambda_A(R^m(F))$ soit engendré, en tant qu'idéal de $W^m(\{\dot{A}\})$, par les $\lambda_A(\{\dot{r}_i\})$.

d) Par définition même du $\text{ptgl}^m(\tilde{A})$, les vecteurs $\vec{V}$ tels que $D_A^1 \dot{r}_i[\vec{V}] = 0$ sont exactement ceux qui sont situés dans le $\text{ptgl}^m(\tilde{A})$.

Le nombre des indices i est donc égal à $n - d_m(\tilde{A})$. D'après la remarque finale du § 7, pour tout $\{\dot{x}\} \in A^m \cap R^m(F)$ on a

$$(8.1) \quad (\lambda_A(\{\dot{x}\}), \odot \vec{V}) = 0.$$

Pour démontrer qu'au point $\tilde{A}$, $\text{ptgl}^1(\tilde{A}) = \text{ptgl}^m(\tilde{A})$ raisonnons par l'absurde:

S'il n'en était pas ainsi, il existerait un vecteur $\vec{V}_1 \in \text{ptgl}^m(\tilde{A})$ et tel que $\vec{V}_1 \notin \text{ptgl}^1(\tilde{A})$.

D'après le Théorème 2 bis, il existerait dans $W^1(F)$ un champ W -taylorien, $\{\dot{r}\} \in \overline{A^m} \cap R^m(F)$ et tel que $D_A^m \cdot \dot{r}[\odot \vec{V}_1] \neq 0$. D'où la contradiction avec la formule (8.1).

e) Soient $\{\dot{s}_j\}$ (où $\{\dot{s}_0\} =$ l'unité e , et $j = 0, 1, \dots, d_m(\tilde{A})$) des éléments de $W^m(F)$ tels que les $\lambda_A(\{\dot{s}_j\})$ engendrent $\lambda_A(S^m(F))$ en tant que sous-algèbre.

La réunion des $\{\dot{r}_i\}$ et des $\{\dot{s}_j\}$ (avec $j \neq 0$) constitue un système de rang n en $\tilde{A}$ de champs W -tayloriens. Il existe donc un voisinage de $\tilde{A}$ dans F où ce système est encore de rang n . En tout point de ce voisinage les $\{\dot{r}_i\}$ forment un système de rang $n - d_m(\tilde{A})$; et les $\{\dot{s}_j\}$ ($j \neq 0$) un système de rang $d_m(\tilde{A})$.

En tout point $\tilde{M}$ de ce voisinage, le nombre maximum d'éléments de $R^m(F)$ (resp. $S^m(F)$) linéairement indépendants modulo $\overline{M^2}$, nombre qui est égal à $n - d_m(\tilde{M})$ (resp. $1 + d_m(\tilde{M})$), est supérieur ou égal à $n - d_m(\tilde{A})$ (resp. à $1 + d_m(\tilde{A})$).

En rapprochant ces deux affirmations on trouve que $d_m(\tilde{M}) = d_m(\tilde{A})$.

On en déduit que pour que $W^m(F)$ soit wedderburnienne, il est nécessaire que F soit la réunion d'un nombre fini d'ensembles fermés, sur chacun desquels d_m reste constante, et égale à d_1 .

Montrons maintenant que les conditions du Théorème 3 sont aussi suffisantes pour que $W^m(F)$ soit wedderburnienne: nous allons même démontrer un résultat plus précis.

Considérons dans $W^m(F)$ l'ensemble des champs W -tayloriens $\dot{f}$ tels qu'en chaque point $A \in F$, et pour tout vecteur $\vec{N}_A$ perpendiculaire à $\text{ptgl}^m(A)$ on ait

$$D_A^k \dot{f} [\odot \vec{N}_A] = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, m.$$

Cet ensemble est un sous-espace fermé (car c'est l'orthogonal d'un ensemble de distributions). C'est une sous-algèbre, comme le montre aussitôt la formule de Leibniz. Appelons $S^m(F)$ cette sous-algèbre fermée.

(8.2) Nous nous proposons de montrer que si en chaque point A de F , $d_m(A) = d_1(A)$ et que si la fonction $M \rightarrow d_m(M)$ varie continûment sur F , alors $S^m(F)$ est un supplémentaire topologique du radical $R^m(F)$.

(8.3) En d'autres termes, il faut montrer que si F satisfait à nos hypothèses, il est possible de faire correspondre à tout $\dot{f} \in W^m(F)$ un $\dot{f}_s \in W^m(F)$ tel que $D^\circ \dot{f} = D^\circ \dot{f}_s$, et que $D_A^k \dot{f}_s [\odot \vec{N}_A] = 0$ pour tout vecteur $\vec{N}_A$ perpendiculaire au $\text{ptgl}^m(A)$ (où $1 \leq k \leq m$).

Pour démontrer ce dernier résultat, nous envisagerons trois cas:

A) Premier cas particulier: Supposons d'abord que F soit un pavé compact à p dimensions, situé dans un sous-espace X à p dimensions. Soit Y le sous-espace de E perpendiculaire à X . E étant identifié au produit $X \times Y$, nous choisissons un système de coordonnées tel que $x_1, x_2, \dots, x_p$ représente les coordonnées dans X , et $y_1, y_2, \dots, y_{n-p}$ dans Y .

Un champ W -taylorien $\dot{f} \in W^m(F)$ est déterminé par la connaissance de toutes les dérivées partielles

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} \dot{f}}{\partial x^{\alpha_1} \partial x^{\alpha_2} \dots \partial y^{\beta_1} \partial y^{\beta_2} \dots} = \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} \dot{f}}{\partial x^\alpha \cdot \partial y^\beta}$$

où α et β représentent des multi-indices tels que $|\alpha| + |\beta| \leq m$.

Mais il suffit de connaître les seules fonctions numériques $f = D^0 f$ et $\frac{\partial^{|\beta|} \dot{f}}{\partial y^\beta}$ pour connaître ipso facto les autres dérivées partielles, à condition que f soit une fonction m -fois continûment dérivable définie sur $F \subset X$.

Il reste à s'assurer que le champ taylorien ainsi déterminé sur $F \subset X \times Y$, satisfait bien aux inégalités W). En utilisant, pour ce calcul, les notations de M. Whitney, la vérification des inégalités W) se réduit à la constatation que la fonction $\frac{\partial^{|\alpha| + |\beta|} f}{\partial x^\alpha \cdot \partial y^\beta}$ est $m - |\alpha| - |\beta|$ fois continûment dérivable.

(8.4) Il est essentiel de remarquer que l'on obtient un champ W -taylorien en choisissant arbitrairement et indépendamment les fonctions

$$\frac{\partial^{|\beta|} \dot{f}}{\partial y^\beta} \in D^{m-|\beta|}(F).$$

Ceci posé faisons correspondre à tout $\dot{f} \in W^m(F)$ l'unique champ W -taylorien $\{f_s\}$ défini par

$$D^0 f = D^0 f_s$$

$$\frac{\partial^{|\beta|} \dot{f}_s}{\partial y^\beta} = 0$$

pour tout multi-indice β , tel que $|\beta| \leq m$.

La décomposition $\dot{f} = \dot{f}_s + \dot{f} - \dot{f}_s$ réalise la décomposition de $W^m(F)$ en somme directe de $S^m(F)$ et $R^m(F)$; il est immédiat que $S^m(F) \cap R^m(F) = 0$, (car $D^0 f = 0$ et $\frac{\partial^{|\beta|} \dot{f}}{\partial y^\beta} = 0$ implique que $\dot{f} = 0$).

Une somme directe algébrique de deux sous-espaces fermés de $W^m(F)$ est une somme directe topologique d'après le théorème de Banach.

B) Deuxième cas particulier. Supposons que F soit une variété m -fois continûment dérivable à p dimensions régulièrement plongée dans K . Pour tout $A \in F$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de A dans K et un homéomorphisme ϑ m -fois continûment dérivable de ce voisinage dans un espace E à n dimensions, tel que F soit appliqué sur un pavé compact à p dimensions situé dans un sous-espace X .

Comme la propriété (8.3) est de nature locale, il est légitime de la

démontrer en supposant que F est en entier contenu dans $\mathfrak{V}$ (au besoin en substituant $F \cap \mathfrak{V}$ à F).

Dans ces conditions l'application ϑ définit un isomorphisme de $W^m(F)$ sur $W^m(\vartheta(F))$: Cet isomorphisme fait correspondre à tout $\{f_s\} \in W^m(F)$, le champ W -taylorien $\{\bar{f}\} \in W^m(\vartheta(F))$ défini par $\bar{f} = \{f_s\} \circ \vartheta$. Cela signifie que $D^\alpha \bar{f}$ est la fonction composée $D^\alpha f \circ \vartheta$, et que les $D^k \bar{f}$ se calculent à l'aide de la formule (9.5) du Chapitre I.

Nous nous proposons de déterminer $\{f_s\}$: pour cela nous nous contenterons de déterminer $\{f_s\}$ (image de f_s par l'isomorphisme précédent). $D^\alpha \bar{f}_s$ (définie sur $\vartheta(F) \subset X$) est égale à la fonction $D^\alpha \bar{f}$. Comme cette dernière fonction est m -fois continûment dérivable, sa seule connaissance détermine les dérivées partielles $\frac{\partial^\alpha f_s}{\partial x^\alpha}$. Pour calculer $D^1 f_s$, remarquons

que la différentielle de l'homéomorphisme ϑ transforme le champ ($m-1$ fois continûment dérivable) des éléments de contact à $n-p$ dimensions normaux à F , en un champ d'éléments de contact $m-1$ fois continûment dérivable (défini sur $\vartheta(F)$) que nous noterons $\bar{M} \rightarrow \eta_{\bar{M}}$ (où $\bar{M}$ désigne $\vartheta(M)$). En chaque point $\bar{M} \in \vartheta(F)$ l'élément de contact $\eta_{\bar{M}}$ est transversal à X .

Comme nous voulons que $D_M^1 \bar{f}_s [\vec{V}] = 0$ pour tout vecteur $\vec{V}$ perpendiculaire au $\text{ptgl}^m(M)$, il faudra que $D_{\bar{M}}^1 \bar{f}_s [\vec{V}] = 0$ pour tout vecteur situé dans $\eta_{\bar{M}}$. Or nous connaissons déjà $D_M^1 \bar{f}_s [\vec{V}]$ pour tout vecteur $\vec{V}$ situé dans X . Un simple calcul linéaire nous permettra donc de calculer cette expression pour $\vec{V}$ situé dans Y (sous-espace orthogonal à X). Ce calcul utilise en chaque point M la matrice $\mathfrak{M}_{\bar{M}}$ de projection de η_M sur Y , parallèlement à X . Comme $\eta_{\bar{M}}$ est un champ $m-1$ fois continûment dérivable d'éléments de contact, il s'ensuit que les coefficients de $\mathfrak{M}_{\bar{M}}$ sont des fonctions $m-1$ fois continûment dérivables définies sur $\vartheta(F)$. Finalement nous trouvons bien pour $-\frac{\partial^1 f_s}{\partial y^\beta}$ (où $|\beta|=1$) des fonctions $m-1$ fois continûment dérivables.

La connaissance de $\frac{\partial^1 f}{\partial x^\alpha}$ ($|\alpha|=1$) et de $-\frac{\partial^1 f}{\partial y^\beta}$ ($|\beta|=1$) détermine entièrement $D^1 f_s$.

La détermination des $D^k f_s$ se poursuit par récurrence. Supposons que le calcul ait été effectué jusqu'à l'entier $k-1$. A ce stade nous connaissons

déjà $D_{\bar{M}}^k f_s [T]$ pour tout tenseur symétrique T de la forme $(\overset{p}{\odot} \vec{V}) \odot (\overset{k-p}{\odot} \vec{W})$, où $\vec{V}$ est situé dans X , $\vec{W}$ dans Y , et où $p \neq 0$. Il reste à déterminer $D_{\bar{M}}^k \bar{f}_s [T]$ pour $T = \overset{k}{\odot} \vec{W}$.

Pour cela utilisons la condition $D_{\bar{M}}^k \dot{f} [\overset{k}{\odot} \vec{N}_M] = 0$ exigée par l'énoncé. Elle se traduit par une condition sur f_s , à savoir

$$D_{\bar{M}}^k f_s (\overset{k}{\odot} \vec{N}_M) = 0.$$

Reportons-nous à la formule (9.5) du Chapitre I, où f est remplacé par $\bar{f}_s$ et Φ par ϑ . Au second membre n'intervient qu'une seule fois une dérivée k -ième (pour que $p = k$, il est nécessaire que $\mu_1 = k$, et que les autres μ_i soient nuls).

Il en résulte qu'au second membre de (9.5) tout est connu, à l'exception du terme

$$D_{\bar{M}}^k \bar{f}_s [\overset{k}{\odot} (D_M^1 \vartheta [\vec{N}_A])].$$

Comme le premier membre de la formule doit être nul, nous sommes en mesure de calculer $D_{\bar{M}}^k \bar{f}_s [\overset{k}{\odot} \vec{V}]$ pour tout vecteur $\vec{V}$ situé dans $\eta_{\bar{M}}$.

En utilisant la matrice de projection de $\overset{k}{\odot} \eta_{\bar{M}}$ sur $\overset{k}{\odot} Y$ qui n'est autre que la puissance tensorielle symétrique de la matrice $\mathfrak{M}_{\bar{M}}$, nous en déduisons les $\frac{\partial^k \bar{f}_s}{\partial y^{\beta}}$, où $|\beta| = k$. Tous ces calculs ne comportent que des opérations algébriques effectuées sur des fonctions numériques au moins $m - k$ fois continûment dérivables: il s'ensuit que les dérivées partielles $\frac{\partial^k \bar{f}_s}{\partial y^{\beta}}$ que nous déterminons sont également $m - k$ fois continûment dérivables. En utilisant (8.4) nous concluons que nous avons bien construit le champ W -taylorien $\{\bar{f}_s\}$ répondant aux conditions de la proposition (8.3).

Cas général. Soit F maintenant un ensemble fermé tel qu'en chacun de ses points $d_1 = d_m = p$.

Nous pouvons immerger F (localement) dans une variété m -fois continûment dérivable à p dimensions, et prolonger (grâce au théorème de Whitney) le champ W -taylorien $\{\dot{f}\}$ défini sur F , en un champ W -taylorien défini sur la variété d'immersion. On peut alors en déduire un champ W -taylorien $\{\dot{f}_s\}$ comme au cas particulier précédent.

Mais il y a une part d'arbitraire dans notre calcul: à savoir le choix

de la variété d'immersion, et le choix du prolongement. Il faut maintenant prouver que deux $\{\dot{f}_s\}$ calculés à partir d'immersions différentes, et de prolongements différents, sont égaux sur F . On est ramené grâce à la carte ϑ qui nous a servi dans l'étude du cas précédent, à démontrer la proposition suivante.

(8.5) Soit F un fermé contenu dans X , tel que $d_m = p = d_1$ en tout point de F . Si deux fonctions f et $f' \in \mathfrak{D}^m(X \times Y)$ sont telles qu'en tout point M de F , on ait

$$f(M) = f'(M)$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial^{\beta} f}{\partial Y^{\beta}} = \frac{\partial^{\beta} f'}{\partial Y^{\beta}}$$

pour tout β tel que $|\beta| \leq m$, alors $g = f - f'$ appartient à

$$J^m(F) \subset \mathfrak{D}^m(X \times Y).$$

Il suffit de montrer que toutes les dérivées partielles de g s'annulent sur F . Or $\frac{\partial^{|\beta|} g}{\partial Y^{\beta}}$ est une fonction nulle sur F . F considéré comme partie de X (et non de $X \times Y$) est antiprimaire d'après le Théorème II.

Il s'ensuit que $\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} g}{\partial X^{\alpha} \cdot \partial Y^{\beta}}$ s'annule également sur F . Toutes les dérivées partielles de g s'annulent donc.

La proposition (8.5) est ainsi entièrement démontrée; et par conséquent le Théorème 3.

CHAPITRE IV

LES ALGÈBRES $L_{\alpha}^m(K)$ ET $Z_{\alpha}^m(K)$.

Définition. Nous appellerons $L_{\alpha}^m(K)$ le sous-espace de $\mathfrak{D}^m(K)$, formé des fonctions qui admettent un m -module de continuité de la forme $K_f \cdot \alpha$, où α est un module de continuité fixé, et K_f une constante dépendant de l'élément $f \in L_{\alpha}^m(K)$ choisi.

Le module de continuité α définit sur K une métrique (cf. Chap. I (1.3)) en prenant pour distance de deux points M et N l'expression $\alpha(\|MN\|)$. Comme K est un pavé compact, $L_{\alpha}^m(K)$ est l'espace des fonctions de $\mathfrak{D}^m(K)$ admettant une dérivée même lipschitzienne pour la métrique α .

Définition. Nous appellerons $Z_\alpha^m(K)$ le sous-espace de $L_\alpha^m(K)$ des fonctions admettant un m -module de continuité β négligeable devant α .

Si $f \in Z_\alpha^m(K)$, la fonction $\Delta_\alpha f(M, N) = \frac{D_M^m f - D_N^m f}{\alpha(\|MN\|)}$ définie pour $M \neq N$ se prolonge par continuité à $K \times K$. Elle est nulle sur la diagonale Δ de $K \times K$.

Si $f \in L_\alpha^m(K)$ cette même fonction $\Delta_\alpha f(M, N)$ est définie, continue, et bornée sur $K \times K - \Delta$. Elle ne se prolonge plus par continuité à $K \times K$. Nous poserons alors par convention $\Delta_\alpha f(M, M) = 0$. Dans ce cas, $\Delta_\alpha f$ est bornée, mais non pas continue sur $K \times K$.

On peut définir sur ces deux espaces une norme :

$$(1.1) \quad \|f\|_{K, \alpha}^m = \|f\|_K^m + \sup_{(M, N) \in K \times K} \|\Delta_\alpha f(M, N)\|.$$

Proposition I. Si x est négligeable devant $\alpha(x)$, $L_\alpha^m(K)$ et $Z_\alpha^m(K)$ sont des algèbres de Banach pour la norme (1.1).

D'abord ce sont des algèbres (cf. Chap. I Prop. IV). En appliquant, la formule (10,6) du Chap. I, on vérifie que

$$\|fg\|_{K, \alpha}^m \leq C \times \|f\|_{K, \alpha}^m \cdot \|g\|_{K, \alpha}^m$$

(où la constante C peut être égale à $2^{m+1} \left(\max_{x \in [0, d]} \frac{x}{\alpha(x)} \right) + 2$).

Pour montrer que $L_\alpha^m(K)$ est complet, il suffit de remarquer que sa boule unité est un ensemble compact, pour la topologie induite par $\mathfrak{D}^m(K)$ (th. d'Ascoli). C'est donc un ensemble "complétant" (cf. BEVT Chap. III § 3, démonstration du Lemme 1).

$L_\alpha^m(K)$ est donc un espace de Banach.

Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre défini sur $K \times K - \Delta$ qui induit sur $K \times K$ un filtre plus fin que le filtre des voisinages de la diagonale dans $K \times K$. La forme linéaire sur $L_\alpha^m(K)$, définie par

$$f \rightarrow \lim_{\mathfrak{U}} \Delta_\alpha^m f(M, N)[T] \quad (\text{où } T \in \odot^m E)$$

est bornée, donc continue, sur $L_\alpha^m(K) \cdot Z_\alpha^m(K)$ est précisément le sous-espace de $L_\alpha^m(K)$, où s'annulent toutes les formes linéaires de cette nature. (On utilise le fait que tout filtre (sur $K \times K$) est l'intersection des ultra-

filtres qui sont plus fins que lui (cf. BTG Chap. I § 5 Exer. 8)). Ainsi $Z_\alpha^m(K)$ est un sous-espace fermé de $L_\alpha^m(K)$.

Remarque. Si α est égal à la fonction x , $Z_x^m(K)$ est identique à l'espace des fonctions qui ont un m -module de continuité nul, c'est à dire des polynômes du même degré (cf. Chap. I (1.5) et Prop. IV). Ce n'est pas une sous-algèbre. Le cas $\alpha(x) = x$ est tout à fait différent du cas général. C'est pourquoi à partir de maintenant nous supposons que x est négligeable devant $\alpha(x)$.

Proposition II. Si β est un module de continuité négligeable devant α la boule unité de $L_\beta^m(K)$ est compacte dans $Z_\alpha^m(K)$.

L'application $f \rightarrow \Delta_\alpha^m f(M, N)$ est une application continue de $Z_\alpha^m(K)$ dans l'espace $C(K \times K, L(\odot^m E, R))$. La topologie de $Z_\alpha^m(K)$ est la moins fine de celles qui rendent continues 1°) l'application précédente 2°) l'application canonique de $Z_\alpha^m(K)$ dans $\mathfrak{D}^m(K)$: nous appellerons ces deux applications les applications fondamentales de $Z_\alpha^m(K)$.

Pour établir notre proposition, il suffit de montrer que la boule unité B de $L_\beta^m(K)$ est fermée dans $Z_\alpha^m(K)$, et que son image par les applications fondamentales est relativement compacte.

Cette boule unité est déjà fermée dans $\mathfrak{D}^m(K)$, donc dans $Z_\alpha^m(K)$. De plus les $\Delta_\alpha^m f(M, N)$ sont équicontinues sur $K \times K$, lorsque f décrit B : c'est évident en tout point non situé sur la diagonale: et les $\Delta_\alpha^m f(M, N)$ sont majorés par $\beta(\|MN\|)/\alpha(\|MN\|)$, ce qui établit l'équicontinuité en chaque point de Δ . La Proposition II résulte alors du théorème d'Ascoli.

Corollaire. Si une suite $f_n \in Z_\alpha^m(K)$ converge vers f , pour la topologie $\mathfrak{D}^m(K)$ et reste bornée dans un $L_\beta^m(K)$, où β est négligeable devant α , alors la suite converge vers f dans $Z_\alpha^m(K)$.

Proposition III. Les algèbres $L_\alpha^m(K)$ et $Z_\alpha^m(K)$ sont denses dans $\mathfrak{D}^m(K)$. L'adhérence de $\mathfrak{D}^{m+1}(K)$ et de $\mathfrak{D}^\infty(K)$ dans $L_\alpha^m(K)$ est $Z_\alpha^m(K)$.

D'abord, $\mathfrak{D}^{m+1}(K)$ contenu dans $Z_\alpha^m(K)$ est déjà dense dans $\mathfrak{D}^m(K)$, ce qui prouve la première assertion.

Pour prouver le second point, il suffit de montrer que $\mathfrak{D}^{m+1}(K)$ est

dense dans $Z_\alpha^m(K)$. Soit alors $f \in Z_\alpha^m(K)$. f possède un m -module de continuité β négligeable devant α . Nous allons régulariser f à l'aide d'une suite de régularisantes $\in \mathfrak{D}^{m+1}(K)$, (resp. $\mathfrak{D}^\infty(K)$). On obtient ainsi une suite de fonctions $\in \mathfrak{D}^{m+1}(K)$ (resp. $\mathfrak{D}^\infty(K)$) convergent vers f au sens de $\mathfrak{D}^m(K)$. De plus, ces régularisées forment une suite bornée de $L_\beta^m(K)$

(en effet, si $h_n = f * \rho_n$, pour calculer $\frac{D_M^m h_n - D_N^m h_n}{\beta(\|MN\|)}$ il suffit de calculer $\frac{D_M^m f - D_N^m f}{\beta(\|MN\|)}$, de poser $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{V}$, de considérer $\overrightarrow{V}$ comme un vecteur

fixe, et de régulariser par ρ_n , la fonction de M ainsi obtenue). Il s'ensuit que les régularisées de f possèdent un m -module de continuité de la forme $K \cdot \beta$, (où K est une constante). D'après le corollaire de la Proposition II, la suite ainsi construite converge vers f au sens de $Z_\alpha^m(K)$. La densité de $\mathfrak{D}^{m+1}(K)$ (resp. $\mathfrak{D}^\infty(K)$) dans $Z_\alpha^m(K)$ est ainsi démontrée.

Proposition IV. L'algèbre $\mathfrak{D}^m(K)$ est limite inductive (au sens large) des $Z_\alpha^m(K)$. (Cf. B EVT Chap. II § 2).

$\mathfrak{D}^m(K)$ est réunion des $Z_\alpha^m(K)$, car tout élément de $\mathfrak{D}^m(K)$ admet un m -module de continuité β et il existe un module de continuité α , tel que β soit négligeable devant α . Désignons par $\mathfrak{E}$ la topologie limite inductive sur $\mathfrak{D}^m(K)$. Comme c'est la plus fine qui rende continues les injections canoniques $Z_\alpha^m(K) \rightarrow \mathfrak{D}^m(K)$, elle est plus fine que la topologie forte usuelle.

Pour montrer que la topologie $\mathfrak{E}$, et la topologie forte de $\mathfrak{D}^m(K)$ sont identiques il suffit de montrer que si une suite $f_i \in \mathfrak{D}^m(K)$ converge fortement vers 0, elle converge aussi vers 0 au sens de $\mathfrak{E}$. Les $D^m f_i$ constituent alors une suite de fonctions tendant uniformément vers 0 (par conséquent une suite équicontinue). Il existe donc un module de continuité β commun à tous les $D^m f_i$ (cf. Chap. I § 2 Lemme I et II). D'après le corollaire de la Proposition II, les f_i convergent vers 0 dans $Z_\alpha^m(K)$ (où $\alpha = \sqrt{\beta}$). Les f_i convergent par conséquent vers 0 au sens de la topologie $\mathfrak{E}$. Ce qui restait à démontrer.

Proposition V. Le dual $(Z_\alpha^m(K))'$ s'identifie avec un sous-espace faiblement dense de $(\mathfrak{D}^{m+1}(K))'$. Toute distribution à support ponctuel $\in (Z_\alpha^m(K))'$ appartient à $(\mathfrak{D}^m(K))'$. Toute distribution $\in (Z_\alpha^m(K))'$ peut se mettre sous la forme d'une

somme d'une distribution à support ponctuel donné, et de distributions L ayant la forme

$$f \rightarrow \langle \Delta_{\alpha}^m f(M, N)[T_i], \mu_i \rangle,$$

où $T_i \in \odot^m E$, et où μ_i est une mesure sur $K \times K$.

La première assertion s'obtient par transposition à partir de la Proposition IV. (Cf. B EVT Chap. IV § 4 Prop. III).

Tout élément de $(Z_{\alpha}^m(K))'$ à support ponctuel A est à priori une distribution du $m+1$ ème ordre au plus, de support A . Mais une dérivée partielle d'ordre total $m+1$ d'une mesure de Dirac ne se prolonge pas par continuité à $Z_{\alpha}^m(K)$. Ainsi, l'ensemble des distributions à support ponctuel A , $\in Z_{\alpha}^m(K)$ ne comprend que des distributions d'ordre m au plus.

Remarque. Le dual de $L_{\alpha}^m(K)$ ne comprend pas que des distributions. Nous avons en particulier donné des exemples de formes linéaires $\in (L_{\alpha}^m(K))'$ obtenues à partir d'ultrafiltres; ce ne sont pas des distributions. D'ailleurs le sous-espace de $(L_{\alpha}^m(K))'$ constitué par les formes linéaires de support A est de dimension infinie.

On en déduit immédiatement que dans $Z_{\alpha}^m(K)$, l'idéal des fonctions qui s'annulent en A ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre m est de codimension finie. Il admet donc un supplémentaire topologique. Il existe un isomorphisme de cet idéal dans l'espace $C(K \times K, L(\odot^m E, R))$ défini par $f \rightarrow \Delta_{\alpha}^m f$. En effet cette application est biunivoque, car la connaissance de $\Delta_{\alpha}^m f(M, A)$ permet de reconstituer $D_M^m f$, lequel ne peut provenir que d'un seul élément f appartenant à l'idéal. De plus cette application est bicontinue, comme le montrent les majorations suivantes

$$\|f\|_{\alpha, K}^m > \|\Delta_{\alpha}^m f\|_{K \times K}^0; \quad D_M^m f\|_K^0 \leq \|D_A^m f\|_K^0 + \omega(\|AM\|) \|\Delta_{\alpha}^m f\|_{K \times K}^0.$$

Quant à la majoration de $\|f\|_K^m$, elle s'obtient par intégration, et utilisation du théorème de la moyenne, à partir de la majoration de $\|D_M^m f\|_K^0$.

$Z_{\alpha}^m(K)$ est isomorphe à la somme directe de l'espace des polynômes du même degré au plus, et d'un sous-espace fermé de $C(K \times K, L(\odot^m E, R))$; le dual de $Z_{\alpha}^m(K)$ est isomorphe à la somme directe d'un espace de distributions à support ponctuel du même ordre au plus, et d'un quotient du dual de $C(K \times K, L(\odot^m E, R))$. Ce dual n'est autre que l'espace des mesures à valeurs dans l'espace $\odot^m E$. Une telle mesure est entièrement

définie par la donnée des couples (μ_i, T_i) où T_i décrit une base de $\odot^m E$, et où μ_i est une mesure scalaire sur $K \times K$. Tout élément du dual de $Z_\alpha^m(K)$ peut donc se mettre sous la forme requise.

Proposition VI. $L_\alpha^m(K)$ est isomorphe au bidual de $Z_\alpha^m(K)$ (x est toujours supposé négligeable devant $\alpha(x)$).

a) A chaque fonction $f \in L_\alpha^m(K)$, nous avons fait correspondre une fonction $\Delta_\alpha^m f(M, N)$ qui reste bornée lorsque f décrit la boule unité de $L_\alpha^m(K)$. Nous montrerons tout à l'heure (cf. d)) que cette fonction est toujours mesurable: il s'ensuivra qu'à toute fonction $f \in L_\alpha^m(K)$ correspond un élément du bidual de $Z_\alpha^m(K)$: Le produit scalaire de f , par l'élément de $Z_\alpha^m(K)'$ que définit (μ, T) est $\langle \Delta_\alpha^m f(M, N)[T], \mu \rangle$. De plus, deux fonctions distinctes de $L_\alpha^m(K)$ séparant au moins une mesure de Dirac il s'ensuit que l'application de $L_\alpha^m(K)$ dans le bidual de $Z_\alpha^m(K)$ est biunivoque.

b) On sait que la boule unité du bidual d'un espace de Banach est le complété faible de la boule unité. Pour démontrer notre proposition, il suffira de montrer que la boule unité B de $L_\alpha^m(K)$ est compacte pour la topologie $\sigma(L_\alpha^m(K), (Z_\alpha^m(K))')$. Pour cela nous allons montrer que cette dernière topologie faible sur B est moins fine que la topologie induite par la topologie forte de $\mathfrak{D}^m(K)$ (car pour cette dernière B est compact et métrisable) (notons que les deux topologies que nous comparons sont séparées).

c) Comme, par définition, $\sigma(L_\alpha^m(K), (Z_\alpha^m(K))')$ est la topologie la moins fine parmi celles qui rendent continues les éléments de $(Z_\alpha^m(K))'$, il nous suffira, pour effectuer la comparaison des deux topologies, de montrer que tout élément de $(Z_\alpha^m(K))'$ est une fonction continue sur B , muni de la topologie induite par $\mathfrak{D}^m(K)$.

d) Soit f_n une suite d'éléments de B , convergeant dans $\mathfrak{D}^m(K)$ vers f (qui appartient alors à B). Par définition de B , les $\|\Delta_\alpha^m f_n(M, N)\| \leq 1$. Et par ailleurs, la suite des $\Delta_\alpha^m f_n(M, N)$ converge simplement vers $\Delta_\alpha^m f(M, N)$, car les $\Delta_\alpha^m f_n(M, N)$ étant nulles sur la diagonale, y convergent simplement vers 0; et d'autre part les $\Delta_\alpha^m f_n(M, N)$ convergent uniformément vers $\Delta_\alpha^m f(M, N)$ sur tout compact disjoint de la diagonale (le dénominateur $\alpha(\|MN\|)$ des $\Delta_\alpha^m f_n(M, N)$ reste uniformément minoré sur tout compact disjoint de la diagonale).

Toute fonction $f \in L_\alpha^m(K)$ peut être approchée au sens de $\mathfrak{D}^m(K)$ par une suite de fonctions appartenant à $\mathfrak{D}^{m+1}(K) \subset Z_\alpha^m(K)$ pour lesquelles

$\Delta_\alpha^m f(M, N)$ est continue, donc mesurable. Appliquant le théorème de Lebesgue (B. Int. Chap. IV) à cette suite, on en déduit, comme nous l'avions annoncé, que les $\Delta_\alpha^m f(\dot{M}, N)$ sont mesurables.

Puis appliquant de nouveau le théorème de Lebesgue à une suite convergente f_n d'éléments de B , on en déduit que (μ, T) définit une fonction continue sur B muni de la topologie induite par $\mathfrak{D}^m(K)$.

e) Il s'ensuit que B est compact et métrisable, pour la topologie $\sigma(L_\alpha^m(K), (Z_\alpha^m(K))')$. Par conséquent, le complété faible de la boule unité de $Z_\alpha^m(K)$, qui contient B (Cf. a)) est identique à B . C. Q. F. D.

Corollaire 1. Le dual fort $(Z_\alpha^m(K))'$ est de type dénombrable.

Corollaire 2. Les suites de Cauchy faibles de $Z_\alpha^m(K)$ sont exactement les suites de Cauchy de $\mathfrak{D}^m(K)$ qui sont bornées dans $Z_\alpha^m(K)$.

Considérons les distributions de Dirac aux points d'un ensemble dénombrable et dense de K . Elles constituent une partie totale de $(Z_\alpha^m(K))'$ muni de la topologie $\sigma(Z_\alpha^m(K)', L_\alpha^m(K))$; en effet un élément de $L_\alpha^m(K)$ qui est orthogonal à cet ensemble de distributions est nul. Le Corollaire 1 en découle (B. EVT Chap. IV § 2 Prop. IV).

Remarque. Les espaces Z_α^m se rencontrent dans des questions relatives à des ensembles m -critiques (cf. Chap. II § 7). Montrons à titre d'exemple que le sous-espace de $W^1(F)$ (où F est la courbe de Von Koch) formé des éléments critiques est isomorphe, en tant qu'algèbre normée, à un espace $Z_\alpha^0(K)$, où K est un intervalle compact de R , et où α est la fonction $\alpha(x) = x^{\log 4 / \log 3}$.

En effet, nous avons vu que la fonction $f(M) =$ pseudo-longueur de $\widehat{AM}$ réalise un homéomorphisme entre la courbe de von Koch et un intervalle compact de R . En désignant par des lettres accentuées, les images des points de F , on a

$$K' \|MN\|^{\log 4 / \log 3} \leq \|M'N'\| \leq K \|MN\|^{\log 4 / \log 3}.$$

Les éléments 1-critiques sur F sont définis par des fonctions f telles que $\frac{f(M) - f(N)}{\|MN\|}$ tendent vers 0 uniformément lorsque MN tend vers 0.

Il leur correspond grâce à l'homéomorphisme précité des fonctions $\widehat{f}$, définies sur un intervalle compact, et telles que $\frac{\widehat{f}(M') - \widehat{f}(N')}{\|M'N'\|^{\log 3 / \log 4}}$

tendent uniformément vers 0 lorsque $M'N'$ tend vers 0. L'algèbre étudiée est bien isomorphe à l'algèbre $Z_\alpha^0(K)$ car cette application est manifestement surjective.

CHAPITRE V

ALGÈBRES TAYLORIENNES

1. Espace fibrés tayloriens.

L'objet de ce chapitre est l'étude d'une classe d'algèbres de Banach, qui généralisent les algèbres de Whitney. La définition de ces "algèbres tayloriennes" nécessite l'introduction préalable de la notion "d'espace fibré taylorien" (en abrégé EFT).

Définition 1. Un EFT $\mathfrak{E}$ (au sens strict) est un ensemble satisfaisant aux trois conditions A), B) et C) suivantes:

A) $\mathfrak{E}$ est un espace fibré (la définition générale des espaces fibrés se trouve par exemple, dans Steenrod [1] p. 7), dont la base $\mathfrak{U}$ est un espace localement compact. La fibre type $\mathfrak{F}$ est un espace vectoriel de dimension finie N sur le corps complexe C . (Le groupe structural sera le groupe linéaire $GL_N(C)$). La projection canonique de $\mathfrak{E}$ sur $\mathfrak{U}$ sera notée p .

Rappelons qu'une section continue de $\mathfrak{E}$ est une application $M \rightarrow \lambda(M)$ continue de $\mathfrak{U}$ dans $\mathfrak{E}$, telle que $p(\lambda(M)) = M$, pour tout M .

B) Chaque fibre $p^{-1}(A)$ sera munie d'une structure d'algèbre locale (commutative) (cf. Chap. III § 7). Cette structure est reliée à la structure fibrée par les deux relations suivantes:

- (1.1) L'application qui à tout $A \in \mathfrak{U}$, fait correspondre l'élément unité e_A de l'algèbre $\mathfrak{F}_A$ est une section continue.
- (1.2) Soient deux sections continues λ et μ . Définissons le produit de λ par μ , en multipliant en chaque point $A \in \mathfrak{U}$, $\lambda(A)$ par $\mu(A)$, suivant les règles de multiplication de l'algèbre $\mathfrak{F}_A$.

On exige que ce produit $\lambda \cdot \mu$ soit encore une section continue.

C) Chaque fibre n'est pas seulement munie d'une structure d'algèbre mais encore d'une structure d'algèbre normée. Désignons par $\|\cdot\|_A$ la norme sur la fibre $\mathcal{E}_A$ au dessus du point A . Pour chaque algèbre $\mathcal{E}_A$ on a l'inégalité :

$$(1.3) \quad \|x \cdot y\|_A \leq \|x\|_A \cdot \|y\|_A \quad \text{pour tout } x \text{ et } y \in \mathcal{E}_A.$$

Ces normes doivent être soumises à la condition de compatibilité suivante :

(1.4) Pour toute section continue $A \mapsto \lambda(A)$ la fonction numérique $A \mapsto \|\lambda(A)\|_A$ est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{U}$.

Remarques: 1°. L'ensemble $\mathcal{F}$ des sections continues de $\mathcal{E}$ constitue une algèbre commutative, possédant un élément unité (à savoir la section continue postulée en (1.1)).

Pour chaque compact $K \subset \mathbb{U}$, et chaque section continue λ posons

$$(1.5) \quad p_K(\lambda) = \max_{M \in K} \|\lambda(M)\|_M.$$

On vérifie immédiatement que p_K est une semi-norme sur $\mathcal{F}$. L'ensemble de ces semi-normes définit une topologie compatible avec la structure d'algèbre.

2°. La condition (1.4) a été introduite par M. Silov ([2], [3]), dans des cas particuliers. Cet auteur appelle "somme continue d'algèbres de dimension finie" les algèbres construites à partir d'un tel EFT. (Il semble que le nom de "somme semi-continue" conviendrait mieux).

D'autre part, M. Godement a étudié des "sommes continues d'espaces de Hilbert" (cf. [1]), en exigeant la continuité des fonctions $A \mapsto \|\lambda(A)\|$.

Dans la théorie des algèbres normées tayloriennes, c'est la définition de M. Silov qui s'introduit naturellement (cf. la Proposition III ci-dessous et le rôle que joue cette proposition dans la suite).

M. Silov raisonne sur un EFT dont la base est le spectre de l'algèbre. Et il s'introduit alors dans sa théorie des discontinuités, dont l'origine est à chercher dans (1.4). Nous montrons dans la suite que l'on peut éliminer ces discontinuités à condition de construire un EFT convenable, dont la base n'est plus le spectre de l'algèbre, mais un espace localement compact $\mathbb{U}$ que nous appellerons l'ultraspectre de l'algèbre.

3°. La définition précédente est un peu trop étroite pour nos besoins,

car elle exige que les fibres $p^{-1}(A)$ soient toutes de même dimension. C'est pourquoi nous énonçons la définition suivante :

Définition 2. Un EFT au sens large est une somme topologique d'un nombre fini d'EFT au sens strict. La base est, par définition, la somme topologique des bases des EFT composants.

Dans la suite, sauf mention du contraire, lorsque nous parlerons d'un EFT, sans préciser, il s'agira d'un EFT au sens large :

Définition 3. On dit qu'une algèbre $\mathcal{A}$ de Banach, commutative, avec unité e , est taylorienne, s'il existe un EFT $\mathcal{C}$ et une application de $\mathcal{A}$ dans l'algèbre des sections continues de $\mathcal{C}$, en sorte que cette application soit :

- a) un isomorphisme algébrique.
- b) une application continue, (lorsqu'on munit l'espace des sections continues de la topologie indiquée en (1.5)).

Une telle application s'appellera une transformation de Gelfand-Taylor.

2. Quelques exemples d'algèbres tayloriennes.

Toute algèbre semi-simple est trivialement une algèbre taylorienne.

On prend comme EFT l'espace produit du spectre F , et du corps C (considéré comme algèbre locale de dimension 1).

(2.1) La transformation de Gelfand-Taylor se réduit à la transformation de Gelfand.

Voici d'autres exemples plus nettement "tayloriens". L'espace des applications continues d'un espace compact F dans une algèbre locale L de dimension finie est visiblement une algèbre taylorienne: l'EFT correspondant est le produit $F \times L$ du spectre par l'algèbre locale donnée.

Exemple 1. Cet exemple contraste avec l'exemple plus spécial des algèbres de Whitney, où l'application de Gelfand-Taylor est l'application qui à $\{f\}$ fait correspondre l'application $\{M \rightarrow T_M f\}$, à valeur dans l'espace vectoriel des polynômes de degré m au plus muni de la structure d'algèbre locale "intacte" (cf. Chap. III §7) isomorphe à $W^m(\{A\})$. Les transformées de Gelfand-Taylor des éléments de $W^m(F)$ doivent satisfaire à certaines conditions (les inégalités W). On notera que si $W^m(F)$ est semi-simple, on

peut donner diverses transformations de Gelfand-Taylor; notamment (2.1), et la transformation $\{f\} \rightarrow \{M \rightarrow T_M f\}$, correspondant à des valeurs différentes de m .

Exemple 2. Voici un autre schéma permettant d'obtenir d'autres algèbres tayloriennes. Soit F un ensemble compact de R^n . On définit sur l'espace des polynômes à n indéterminées une norme plus fine que la norme de la convergence uniforme sur F , et impliquant la convergence uniforme de certaines dérivées partielles. Le complété d'une telle algèbre normée est une algèbre taylorienne.

(2.2) Par exemple, si l'on prend la norme $\| \cdot \|_F^m$, et que F n'est pas un ensemble de type C_m (cf. Chap. III § 4), on obtient une algèbre taylorienne distincte de l'algèbre de Whitney $W^m(F)$.

(2.3) Si l'on adopte la norme

$$\|P\| = \max_{M \in F} \left\{ |P(M)| + \left| \frac{\partial^2 P(M)}{\partial x^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 P(M)}{\partial x \cdot \partial y} \right| + \left| \frac{\partial^2 P(M)}{\partial y^2} \right| \right\}$$

les propriétés de l'algèbre obtenue dépendent essentiellement de l'ensemble F choisi. Ainsi, si l'on prend pour F , un pavé compact K , on obtient l'algèbre $\mathfrak{D}^2(K)$; il résulte, en effet des inégalités d'Hadamard (cf. B. Fonct. Var. Réelle Chap. I § 3 Exerc. 12) qu'une majoration sur $P(M)$ et ses dérivées secondes implique une majoration sur les dérivées premières (les inégalités d'Hadamard sont valables pour des fonctions de plusieurs variables (cf. H. Cartan ([1])).

Par contre, on peut construire des ensembles fermés, même connexes, pour lesquels la norme (2.3) n'est pas équivalente à $\| \cdot \|_F^m$.

En voici un exemple: Soit F la courbe de R^2 d'équation

$$y = g(x) = x^r \cdot \sin 1/x \quad \text{où} \quad 1/2 < r < 1,$$

c'est une courbe non rectifiable (d'une manière imagée on peut dire que c'est une courbe de "longueur infinie"). Nous allons voir que cette courbe répond à la question. Pour cela, montrons qu'il existe une fonction $f(x, y)$ nulle ainsi que ses dérivées au point $(1, g(1))$, continue, 2 fois continûment dérivable dans tout complémentaire d'un voisinage de l'origine, et telle que

$$\frac{\partial^2 f(x, g(x))}{\partial x^2} = A(x); \quad \frac{\partial^2 f(x, g(x))}{\partial x \partial y} = B(x); \quad \frac{\partial^2 f(x, g(x))}{\partial y^2} = C(x)$$

où A, B et C sont trois fonctions continues quelconques de module inférieur à 1.

On obtient $f(x, g(x))$ par double intégration le long de F . On trouve pour $x > 0$

$$f(x, g(x)) = \int_1^x du \int_1^u A(t) dt + \int_1^x du \int_1^u B(t) g'(t) dt \\ + \int_1^x g'(u) du \int_1^u B(t) dt + \int_1^x g'(u) du \int_1^u C(t) g'(t) dt.$$

Pour prouver la continuité de f sur F , il suffit de montrer que cette intégrale a un sens pour $x \rightarrow 0$. Cela se montre séparément pour les quatre termes de la somme ci-dessus, en remplaçant chaque intégrale double par une intégrale simple, et en utilisant le théorème de la moyenne, ainsi que la majoration

$$|g'(x)| \leq K \cdot x^{r-2} \text{ immédiate à établir.}$$

Par exemple le 4^{ième} terme se majore comme suit :

$$\left| \int_1^x (g(t) - g(x)) g'(t) C(t) dt \right| \leq \int_1^x |g(t) - g(x)| g'(t) dt \\ \leq K \int_1^x (t^r + x^r) t^{r-2} dt$$

et cette dernière intégrale reste bornée pour $x > 0$, dès que $1/2 < r$. Par ailleurs, si $r < 1$, il est facile de choisir $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ de module inférieur à 1, mais tels que la dérivée première de f ne reste pas bornée lorsque $x \rightarrow 0$. (A propos de cet exemple cf. Glaeser [3]).

(2.4) Si l'on choisit la norme

$$\|P\| = \|P\|_K + \max_{M \in K} \left\{ \left| \frac{\partial^2 P(M)}{\partial x^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 P(M)}{\partial y^2} \right| \right\} \quad (K \text{ pavé compact})$$

on obtient une algèbre distincte de $\mathfrak{D}^m(K)$.

Il existe en effet des fonctions 1-fois continûment dérivables, admettant des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ continues sur K mais dépourvues de dérivées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ continues.

Un exemple est fourni en considérant la fonction f définie par la série

$$f(x, y) = \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\log n} x^{n+1} \cdot \sin ny \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Cette fonction est 1-fois continûment dérivable dans la bande $0 \leq x \leq 1$.

Les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont aussi définies et continues.

Cela tient à ce que la série trigonométrique $\sum \frac{1}{n \log n} \sin ny$ représente une fonction continue (cf. Zygmund p. 136). Quant à $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ représentée par la série de cosinus correspondante, elle tend vers l'infini pour $x \rightarrow 1$ et $y \rightarrow 0$. On s'en assure en posant $z = x \cdot e^{iy}$, et en étudiant la série obtenue en multipliant la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n} z^n \quad \text{par } (1-z).$$

M. Choquet nous a signalé que M. Aronszajn est parvenu à construire un autre exemple (non publié) de fonction 1-fois continûment dérivable possédant des dérivées $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ continues, mais pas de dérivée $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Les exemples qui précèdent montrent qu'il existe de nombreuses questions ouvertes relatives à des inégalités entre diverses dérivées partielles. Un chapitre de géométrie infinitésimale directe consisterait à caractériser les ensembles F sur lesquels certaines de ces inégalités sont vérifiées.

Définition. Par analogie avec le radical qui est l'intersection de tous les idéaux maximaux A , nous définirons l'ultraradical d'ordre k comme l'intersection de tous les idéaux fermés $\bar{A}^k$ (où A est un idéal maximal, et A^k l'idéal engendré par les produits de k facteurs appartenant à A).

Toute algèbre taylorienne définie à partir d'un EFT dont les fibres sont des algèbres locales de hauteur m , a un ultraradical d'ordre $m+1$ réduit à 0.

Voici par contre deux exemples d'algèbres dont l'ultraradical d'ordre m n'est pas nul quel que soit m .

Exemple 3. Soit l'algèbre des couples $(f, \hat{f})$ dont la première composante appartient à $C(I)$ et la seconde à $L^1(I)$ (où I est un intervalle compact de R). La multiplication est définie par

$$(f, \widehat{f}) \cdot (g, \widehat{g}) = (fg, f\widehat{g} + g\widehat{f})$$

(ce qui est possible car $L^1(I)$ est un $C(I)$ -module). En normant cette algèbre par la somme des normes de ses composantes dans $C(I)$ et $L^1(I)$ respectivement, on obtient une algèbre de Banach.

Si f ne s'annule pas sur I , l'élément $(f, \widehat{f})$ est inversible, et son inverse est l'élément $(1/f, -\widehat{f}/f^2)$. On en déduit que l'ensemble des idéaux maximaux peut être identifié à I . Le radical de $\mathcal{A}$ est constitué par l'ensemble des couples $(0, \widehat{f})$: il est de carré nul.

Mais on s'assure immédiatement que pour tout k l'idéal A^k est dense dans A (où A est un idéal maximal).

Il résulte que pour tout k le k -ultraradical est identique au radical.

Exemple 4. L'algèbre $\mathcal{A}$ que nous construisons maintenant est une algèbre locale, c'est à dire qu'elle ne comporte qu'un seul idéal maximal. $\mathcal{A}$ est l'algèbre des suites $x = (x_i)$ telles que

$$(2.5) \quad \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{|x_i|}{i!} < \infty. \quad \text{On pose} \quad \|x\| = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{|x_i|}{i!}.$$

On définit le produit par

$$z = x \bullet y \quad \text{et} \quad z_i = \sum_{q=0}^{q=i} x_{i-q} \cdot y_q.$$

On obtient ainsi une algèbre de Banach commutative avec unité:

$$\|z\| \leq \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\left| \sum_{q=0}^{q=i} x_{i-q} \cdot y_q \right|}{i!} \leq \sum_{i=0}^{i=\infty} \sum_{q=0}^{q=i} \frac{|x_{i-q}|}{(i-q)!} \cdot \frac{|y_q|}{q!} \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Tout élément de $\mathcal{A}$ est limite forte de ses suites-sections. Il en résulte que l'élément $a = (a_i)$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf $a_1 = 1$, est un générateur de l'algèbre $\mathcal{A}$.

a appartient au radical, comme le montre le critère de Gelfand:

$$\prod_{n=1}^n \|a^n\| = \prod_{n=1}^n \frac{1}{n!}$$

tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini. On en déduit que $\mathcal{A}$ est une algèbre locale. Quel que soit k , A^k , et par conséquent $\overline{A^k}$, contient un élément a^k non nul.

Il en résulte que l'ultraradical d'ordre k de $\mathcal{A}$ n'est pas réduit à 0,

quel que soit m . Contrairement à ce qui se présente dans l'Exemple 3, on pourrait dire que l'ultraradical d'ordre infini de $\mathcal{A}$ se réduit à 0. Mais en prenant la somme directe des algèbres des Exemples 3 et 4 on obtient une algèbre dont les ultraradicaux d'ordre m sont tous différents et pour lesquels l'intersection de ces ultraradicaux (ultraradical d'ordre ∞) n'est pas réduite à 0.

3. L'ultraspectre.

Dans tous les exemples précédents l'algèbre $\mathcal{A}$ était directement donnée sous sa forme taylorienne: les quotients $\mathcal{A}/\bar{A}^m$ étaient tous isomorphes entre eux, et l'on pouvait directement déterminer une transformation de Gelfand-Taylor. Mais dans de nombreux cas, la structure de $\mathcal{A}/\bar{A}^m$ subit des discontinuités. Cependant on peut, à condition de substituer au spectre un nouvel espace topologique, l'ultraspectre, retrouver une situation analogue. Nous allons formuler des conditions suffisantes, englobant d'ailleurs les cas non pathologiques usuels, pour qu'une telle construction puisse être menée à bien. La théorie qui suit s'applique en particulier aux quotients de $\mathfrak{D}^m(K)$, à une classe d'algèbres étudiées par M. Silov ([1] et [3]), et à diverses algèbres de fonctions dérivables définies dans un domaine et présentant des singularités sur la frontière du domaine.

Les axiomes.

Nous nous proposons d'étudier les algèbres de Banach (sur le corps complexe) commutatives, involutives, avec unité e , et satisfaisant aux 4 axiomes AT_i suivants:

AT_1 : L'algèbre est engendrée par un nombre fini de générateurs

$$x_0 = e, \quad x_1, \dots, x_n.$$

AT_2 : L'algèbre est régulière.⁽¹⁾

AT_3 : La fonction $M \rightarrow d(M)$ à valeurs entières où $d(M)$ = la dimension du quotient $\mathcal{A}/\bar{A}^m$ (où m est un entier fixé), est semi-continue sur le spectre. (Plus généralement, il suffira que cette fonction appartienne à la première classe de Baire.)

1. Une algèbre de Banach commutative est régulière (Silov) si pour tout fermé F_1 , contenu dans le spectre F de l'algèbre et tout point $A \in F$, $A \notin F_1$, il existe un élément de l'algèbre dont la transformée de Gelfand s'annule sur F_1 sans s'annuler en A . Pour les principales propriétés de ces classes d'algèbres Cf. Mackey [1] ou Loomis [1].

AT_4 : L'ultraradical d'ordre $m+1$ est réduit à 0.

Proposition I. Si une algèbre involutive $\mathcal{A}$ satisfait à AT_1 son spectre muni de la topologie faible usuelle est homéomorphe à un compact F de R^{2n} .

On peut en effet adjoindre aux générateurs x_i les éléments x_i^* , puisque $\mathcal{A}$ est munie d'une involution, puis prendre pour nouveaux générateurs les $x_i + x_i^* = z_i$ et les $i(x_i - x_i^*) = z'_i$. Comme le remarque déjà Gelfand (cf. "Normierte Ringe"), l'application qui à tout caractère A fait correspondre le point de coordonnées $z_i(A)$ et $z'_i(A)$ de R^{2n} est un homéomorphisme. (Noter que $z_i(A)$ et $z'_i(A)$ sont réels) (cf. Mackey p. 61 [1]).

Nous étudierons maintenant la correspondance $M \rightarrow \bar{M}^m$, qui à tout point M du spectre de $\mathcal{A}$ associe l'idéal $\bar{M}^m$ de A . Nous assimilerons une telle correspondance à un "champ d'éléments de contact de dimension infinie".

Le langage du Chapitre II, et en particulier les définitions des semi-continuités d'inclusion restent valables. (cf. Chap. II (2.1) et (2.2)). Il faut prendre garde que les propositions du Chapitre II, qui utilisent essentiellement la compacité des grassmanniennes ne s'étendent pas au cas des "éléments de contact de dimension infinie".

Proposition II. Dans une algèbre de Banach, commutative avec unité, les idéaux $\bar{M}^m$ possèdent toujours la semi-continuité inférieure d'inclusion pour tout entier m .

Cela signifie que pour toute suite M_i de points du spectre F tendant vers $A \in F$, et pour tout $f \in \bar{A}^m$, il existe une suite $g_i \in \bar{M}_i^m$ tendant vers f . Il suffit de supposer que f appartient à A^m , et même que f est de la forme $f = f_1 \cdot f_2 \dots f_m$ où les f_j appartiennent à A .

En posant $g_i = (f_1 - f_1(M_i)e) \cdot (f_2 - f_2(M_i)e) \dots (f_m - f_m(M_i)e)$ qui appartient à $\bar{M}_i^m$ et tend vers f , on établit la proposition.

Remarque. La Proposition II est très générale et très faible. Dans le cas où la codimension des $\bar{M}^m$ est finie, et même bornée sur F , on ne peut pas conclure par exemple à la semi-continuité de $d(M)$ (comparer avec la remarque (2.5) du Chap. II). La semi-continuité supérieure d'inclusion des idéaux $\bar{M}^m$ est une propriété beaucoup plus précieuse: en fait elle est une des caractéristiques des algèbres tayloriennes.

Exemple 5. Soit I un intervalle compact, 0 un point intérieur à I .

Soit $\mathfrak{A}$ la sous-algèbre de $D^1(I)$, formée des fonctions dont la dérivée s'annule en O . On vérifie que les idéaux $\overline{M^2}$ possèdent à la fois la semi-continuité inférieure et supérieure d'inclusion. Mais la codimension de $\overline{M^2}$ subit une discontinuité vers le bas en O .

Soit par ailleurs $\mathfrak{A}$ l'algèbre des fonctions dérivables sur AO et sur OB mais possédant une dérivée à droite, et une dérivée à gauche, éventuellement distinctes en O . Ici la semi-continuité supérieure n'est plus assurée. La codimension des idéaux $\overline{M^2}$ subit une discontinuité vers le haut en O .

On peut combiner les deux singularités précédentes. On prendra par exemple pour spectre l'adhérence d'un domaine limité par deux cercles tangents intérieurement en un point O . On considérera l'algèbre des fonctions dérivables dont la dérivée normale en O s'annule, alors que la dérivée tangentielle se dédouble à droite et à gauche.

Ici la fonction $d(M)$ reste constante: cependant l'algèbre recèle au point O du spectre une singularité assez compliquée.

Proposition III. Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre de Banach commutative avec unité. Soit K son spectre. La fonction numérique $(f, M) \rightarrow (\text{distance de } f \text{ à } \overline{M^m})$ définie sur $\mathfrak{A} \times K$, est semi-continue supérieurement.

Montrons cette semi-continuité au point (f, A) .

Pour tout ε donné, on peut trouver un $a \in \overline{A^m}$ tel que $\text{dist}[f, \overline{A^m}] \geq \|f - a\| - \varepsilon$.

On a l'inégalité

$$\begin{aligned} \text{dist}[g, \overline{M^m}] &\leq \|f - g\| + \|f - a\| + \text{dist}[a, \overline{M^m}] \\ &\leq \|f - g\| + \text{dist}[f, \overline{A^m}] + \varepsilon + \text{dist}[a, \overline{M^m}]. \end{aligned}$$

Or d'après la Proposition II $\text{dist}[a, \overline{M^m}]$ tend vers 0 lorsque M tend vers A . En faisant tendre g vers f et M vers A , on établit la semi-continuité supérieure de la fonction étudiée.

Soit maintenant un ensemble fini d'éléments $\{f_\alpha\}$. Considérons la "sphère" $\mathcal{S}$ formée de toutes les combinaisons linéaires

$$\sum \lambda_\alpha f_\alpha \quad \text{où} \quad \sum |\lambda_\alpha|^2 = 1.$$

La fonction numérique $M \rightarrow \text{dist}[\mathcal{S}, \overline{M^m}]$ est semi-continue supérieurement comme enveloppe inférieure d'une famille de fonctions semi-continues

supérieurement (Prop. III). Cette fonction s'annule en un point A si, et seulement si, les f_σ sont linéairement dépendants (mod. $\overline{A^m}$). Nous appellerons cette fonction g le coefficient d'indépendance linéaire du système f_α (mod. $\overline{M^m}$).

Supposons maintenant que AT_1 soit vérifié et considérons le sous-espace de dimension finie $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ dont les éléments sont de la forme $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où p est un polynôme de degré $\leq m$, à n indéterminées. Soit N la dimension de $\mathcal{E}$.

Proposition IV. Il existe un système fini de sous-espaces S_j de $\mathcal{A}$, tel qu'en tout point A du spectre, l'un au moins des S_j soit supplémentaire de $\overline{A^m}$. La fonction $d(M)$ est majorée par N .

Comme A^m contient tous les polynômes en $(x_i - x_i(A) \cdot e)$ dont les monômes ont un degré total minoré par $m+1$, la somme algébrique $\overline{A^m} + \mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{A}$. Mais $\overline{A^m} + \mathcal{E}$ est fermée dans $\mathcal{A}$ (cf. B EVT Chap. I § 2 Corollaire 4 du Théorème 2).

La somme algébrique $\mathcal{E} + \overline{M^m}$ est donc identique à $\mathcal{A}$ pour tout M . On en déduit que la codimension $d(M)$ des $\overline{M^m}$ est majorée par la dimension de $\mathcal{E}$. On obtient un supplémentaire de $\overline{M^m}$ en prenant dans $\mathcal{E}$ un supplémentaire de $\mathcal{E} \cap \overline{M^m}$.

Notre proposition résulte alors du lemme suivant :

“Dans un espace vectoriel de dimension finie N , il existe un nombre fini de sous-espaces S_j à k dimensions, tels que tout sous-espace à $N-k$ dimensions soit supplémentaire de l'un au moins de S_j ”.

Ce lemme est une conséquence immédiate du théorème d'échange (B. Alg. Chap. II § 3).

Théorème 1. Si une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ satisfait à AT_1, AT_2, AT_3 , il existe un ouvert partout dense du spectre, sur lequel les idéaux $\overline{M^m}$ possèdent la semi-continuité supérieure d'inclusion, et sur lequel la fonction $d(M)$ est continue,

a) Considérons dans $\mathcal{A}$ l'ensemble fini de sous-espaces S_j dont la Proposition IV affirme l'existence. Appelons $g_j(M)$ le coefficient d'indépendance linéaire d'une base choisie dans S_j (mod. $\overline{M^m}$). Chacune des fonctions

g_j (en nombre fini) est semi-continue supérieurement. Il existe, d'après un théorème de Baire, déjà cité (cf. Baire [1] p. 81 et 105) un ensemble résiduel, tel qu'en chacun de ses points, g_j soit continue. L'intersection des ensembles des points de continuité des fonctions g_j et de la fonction $d(M)$, (Axiome AT_3), est un résiduel R .

b) En tout point du spectre, les g_j ne sont pas simultanément nuls (Prop. IV). En un point A quelconque de R , l'une au moins des fonctions g_j est à la fois continue, et non nulle. Il existe tout un voisinage de A , où g_j ne s'annule pas; g_j y est même minorée par une constante positive.

Par ailleurs la fonction $d(M)$ à valeurs entières, et continues en A , reste constante dans tout un voisinage de A . Il en résulte que S_j supplémentaire de $\bar{A}^m$, contient une base qui reste linéairement indépendante, et totale (mod $\bar{M}^m$) lorsque M décrit un voisinage de A . Ainsi S_j est un supplémentaire commun des $\bar{M}^m$, où M décrit tout un voisinage de A . L'ensemble des points A du spectre tel qu'il existe un voisinage de A , où les $\bar{M}^m$ possèdent un supplémentaire S_j commun, contient donc un voisinage de R , c'est à dire un ouvert partout dense du spectre.

c) Soit A un point d'un tel ouvert. Tout élément de $\mathfrak{A}$, peut se décomposer suivant S_j et $\bar{A}^m$

$$f = S_A f + R_A f, \quad S_A f \in S_j \quad \text{et} \quad R_A f \in \bar{A}^m.$$

Supposons que $f \notin \bar{A}^m$, c'est à dire $S_A f \neq 0$. En multipliant au besoin f par un facteur non nul, on peut faire en sorte que la somme des carrés des coefficients de $S_A f$, par rapport à la base de S_j , qui a servi à calculer g_j , soit égale à 1.

Par définition de g_j , on a alors $\|S_A f\| \geq g_j(M)$. Mais comme dans tout un voisinage de A , $g_j(M)$ est minorée par une constante positive a , c'est que la distance de $S_A f$ à $\bar{M}^m$ est minorée par a , au voisinage de A .

Par ailleurs, comme $R_A f \in \bar{A}^m$, il existe tout un voisinage de A , tel que la distance de $R_A f$ à $\bar{M}^m$ soit majorée par $a/3$ (Prop. III). Il s'ensuit que la distance de f aux $\bar{M}^m$, est minorée par $2a/3$ au voisinage de A .

On ne peut donc pas trouver une suite de points M_i tendant vers A , et une suite $\varphi_i \in \bar{M}_i^m$ telle que $\|f - \varphi_i\| \rightarrow 0$.

En d'autres termes, si $f \in \limsup_{M \rightarrow A} \bar{M}^m$, alors $f \in \bar{A}^m$. Ceci est la définition même de la semi-continuité supérieure d'inclusion. C. Q. F. D.

Définition. On appelle spectre interne de l'algèbre $\mathcal{A}$, le plus grand ouvert Ω du spectre sur lequel les idéaux $\overline{M^m}$ possèdent la semi-continuité d'inclusion, et où $d(M)$ est continue.

Le théorème précédent assure que le spectre interne est partout dense dans le spectre. Le complémentaire du spectre interne s'appellera la frontière du spectre.

Remarque. Revenons au sous-espace S_j de dimension finie, supplémentaire commun des $\overline{M^m}$ en tous les points d'un voisinage de A . Pour chaque point M de ce voisinage, l'application canonique de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}/\overline{M^m}$ induit sur S_j une application biunivoque. En dehors de la norme induite par $\| \cdot \|$ sur S_j , on peut encore munir S_j , des diverses normes $\| \cdot \|_M$, se déduisant par transport de structure sur S_j des normes quotients de $\mathcal{A}/\overline{M^m}$. Pour tout $f \in S_j$, on a $\|f\|_M = \text{dist}[f, \overline{M^m}]$.

Proposition V. A tout point A du spectre interne, on peut faire correspondre un voisinage $\mathcal{V}$, tel que les $\overline{M^m}$ admettent un supplémentaire S_j commun, et que les normes $\| \cdot \|_M$ soient uniformément équivalentes à la norme $\| \cdot \|$ sur S_j , (pour $M \in \mathcal{V}$).

On a évidemment $\|f\|_M \leq \|f\|$, pour tout $f \in S_j$.

Choisissons une fois pour toutes une base f_i de S_j . Soit $\mathcal{S}$ la "sphère" formée des éléments $\sum \lambda_i f_i$ de S_j , tels que $\sum |\lambda_i|^2 = 1$. Soit $g_j(M)$ le coefficient d'indépendance linéaire des éléments de la base f_i (mod. $\overline{M^m}$) (rappelons que c'est la distance de $\mathcal{S}$ à $\overline{M^m}$). On peut également normer S_j à l'aide d'une nouvelle norme $\| \cdot \|_{\mathcal{G}}$, dont la "sphère unité" est précisément l'ensemble $\mathcal{S}$. Comme sur un espace de dimension finie deux normes quelconques sont équivalentes, il existe une constante H , telle que

$$H \cdot \|f\| \leq \|f\|_{\mathcal{G}}$$

pour tout $f \in S_j$. Or, par définition même de g_j , on a

$$g_j(M) \leq \frac{\text{dist}[f, \overline{M^m}]}{\|f\|_{\mathcal{G}}}$$

ou encore $g_j(M) \|f\|_{\mathcal{G}} \leq \|f\|_M$ pour tout $f \in S_j$.

Enfin $H \cdot g_j(M) \|f\| \leq \|f\|_M \leq \|f\|$.

Or nous avons noté au cours de la démonstration du Théorème II

(cf. b)) que $g_j(M)$ est minorée par une constante non nulle G dans tout un voisinage $\mathfrak{V}$ de A . Ce qui établit l'équivalence uniforme annoncée.

G. H. $\|f\| \leq \|f\|_M \leq \|f\|$ pour tout $f \in S_j$ et tout $M \in \mathfrak{V}$.

Proposition VI. Soit F' un fermé contenu dans le spectre d'une algèbre de Banach satisfaisant aux axiomes AT_i ; soit $\mathfrak{J}$ l'idéal intersection des idéaux $\overline{M^m}$, où M décrit F' . Alors l'algèbre quotient $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ satisfait aussi aux axiomes AT_i , et son spectre est F' .

Montrons d'abord que le spectre de $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ est F' . L'algèbre étant régulière, pour tout point A du spectre $\in F'$, il existe un élément $f \in \mathfrak{A}$ dont la transformée de Gelfand s'annule sur F , et non en A . Comme f^m appartient alors à $\mathfrak{J}$, et non à A , on en conclut que le spectre de $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ qui est contenu dans F et contient F' , sans que A lui appartienne, se réduit à F' .

La vérification des axiomes AT_1 , AT_2 et AT_4 est alors immédiate. Pour vérifier AT_3 il suffit de voir que la fonction $d(M)$ relative à $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ n'est autre que la restriction à F' de la fonction $d(M)$ relative à $\mathfrak{A}$. Pour cela, considérons un idéal maximal A de $\mathfrak{A}$ correspondant à un point de F' . Dans l'homéomorphisme canonique ρ de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$, l'idéal maximal A s'applique sur un idéal maximal $\rho(A)$. On a $\rho(A^m) = (\rho(A))^m$. On en conclut que $\rho(\overline{A^m}) = \overline{(\rho(A))^m}$, car $\rho(A^m)$ est dense dans chacun de ces ensembles fermés. La fonction $d(A)$ pour l'algèbre $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ est égale à la codimension de $(\rho(A))^m$. Il suffit de comparer les dimensions des deux membres extrêmes de la formule :

$$\frac{\mathfrak{A}}{A^m} \cong \frac{\mathfrak{A}/\mathfrak{J}}{A^m/\mathfrak{J}} \cong \frac{\mathfrak{A}/\mathfrak{J}}{\rho(A^m)} \cong \frac{\mathfrak{A}/\mathfrak{J}}{[\rho(A)]^m}$$

pour conclure que les fonctions $d(A)$ prennent la même valeur en A , pour les algèbres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$.

Construction de l'ultraspectre. Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre satisfaisant à AT_i . Le Théorème I permet de déterminer le spectre interne Ω , ouvert partout dense de F . Posons $F_1 = F - \Omega$. Et formons l'idéal $\mathfrak{J}_1$ relatif à F_1 comme dans la proposition précédente. Le quotient $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}_1$ satisfaisant à AT_i on peut trouver un ouvert partout dense de F_1 , spectre interne de l'algèbre $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}_1$. L'itération de ce procédé permet de construire une suite (en général transfinie) de fermés F_α telle que $\alpha > \beta$ entraîne que

F_α est un fermé rare de F_β . A chaque F_α correspond une algèbre quotient $\mathcal{A}/\mathcal{I}_\alpha$. Et $\Omega_{\alpha+1} = F_\alpha - F_{\alpha+1}$ est le spectre interne de cette algèbre quotient.

On appelle *ultraspectre* de l'algèbre $\mathcal{A}$, la somme topologique Ω de la famille des ouverts Ω_α . C'est un espace topologique localement compact. Tout point admet un voisinage homéomorphe à un ensemble de $\mathbb{R}^{2n}$. L'intérêt de cet ultraspectre c'est qu'il permettra d'interpréter l'algèbre $\mathcal{A}$ comme une algèbre taylorienne.

L'ultraspectre vient d'être défini ici d'une façon intrinsèque. Pour pouvoir expliciter l'EFT et les "développements de Taylor" des éléments de $\mathcal{A}$, nous allons utiliser un recouvrement de l'ultraspectre par des ouverts, réalisant l'analogie d'un "atlas" de l'ultraspectre. A chacun des sous-espaces S_j , faisons correspondre le plus grand ouvert O_j de l'ultraspectre tel que S_j soit un supplémentaire de tout idéal $\overline{A^m}$, où $A \in O_j$. Les O_j , en nombre fini, constituent un recouvrement de l'ultraspectre. Nous appellerons "développement quasi-taylorien" de f au point A (par rapport au système S_j) chacune des composantes $S_A f$ ($f = S_A f + R_A f$; $S_A f \in S_j$; $R_A f \in \overline{A^m}$) relatives aux S_j tels que $A \in O_j$.

Proposition VII. Les développements quasi-tayloriens d'un élément $f \in \mathcal{A}$ varient continûment sur l'ultraspectre.

Soient $A \in O_j$, et soit $\mathcal{V}$ un voisinage compact de A , contenu dans O_j .

a) Montrons d'abord que l'application $M \rightarrow S_M f$ de $\mathcal{V}$ dans S_j est bornée. Sinon, il existerait une suite de points $M_i \in \mathcal{V}$, convergeants vers un point $M \in \mathcal{V}$, et telle que $S_{M_i} f$ tende vers l'infini.

Dans l'égalité :

$$f / \|S_{M_i} f\| = S_{M_i} f / \|S_{M_i} f\| + R_{M_i} f / \|S_{M_i} f\|,$$

le premier membre tendrait vers 0.

Le premier terme du second membre resterait sur la "sphère unité" compacte de S_j . En extrayant au besoin une sous-suite de la suite M_i , on peut faire en sorte que $S_{M_i} f / \|S_{M_i} f\|$ tende vers une limite de norme 1 appartenant à S_j , donc n'appartenant pas à $\overline{M^m}$.

Il en résulterait que le deuxième terme du second membre tendrait également vers une limite. Or une limite d'éléments appartenant à $\overline{M_i^m}$ appartient à $\overline{M^m}$ (Théorème I: par définition de la semi-continuité supérieure d'inclusion). On aboutit ainsi à une contradiction.

b) Nous venons d'établir, que si M décrit un compact V de O_j ,

l'ensemble des opérateurs $f \rightarrow S_M f$ est faiblement borné. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, cet ensemble est aussi fortement borné, d'où l'existence d'une constante K_V , telle que

$$(3.1) \quad \|S_M f\| \leq K_V \cdot \|f\| \quad \text{pour } M \in \mathcal{V}.$$

Il en résulte que $\|R_M f\| \leq (1 + K_V) \|f\|$.

c) Comme les $S_M f$ restent bornés lorsque M tend vers A , on peut par extraction de sous-suites, faire en sorte que $S_{M_i} f$ tende vers une limite $L \in S_j$ lorsque M_i tend vers M .

La suite $f - S_{M_i} f$ formée d'éléments de $\overline{M_i^m}$ tend vers la limite $f - L$, qui doit appartenir à $\overline{M^m}$, d'après le Théorème I. Comme la somme $S_j + \overline{M^m}$ est directe, c'est que $L = S_M f$, ce qui établit la continuité de l'application $M \rightarrow S_M f$.

Corollaire. L'application $(f, M) \rightarrow S_M f$ est continue sur le produit $\mathcal{A} \times \mathcal{O}_j$.

$$\text{Car } S_A f - S_M g = (S_A f - S_M f) + S_M(f - g).$$

Lorsque g tend vers f , et M vers A , le second membre tend vers 0 en vertu de la Proposition VII, et de (3.1).

Théorème II. Toute algèbre de Banach commutative, involutive, avec unité e , et satisfaisant aux quatre axiomes AT_i est taylorienne.

Montrons d'abord que ces hypothèses déterminent un EFT $\mathcal{C}$ (au sens large), dont la base est l'ultraspectre $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$.

a) L'ensemble $\tilde{\mathcal{C}}$ sous-jacent à la structure d'EFT, sera la réunion des espaces quotients $\mathcal{A}/\overline{M^m}$. Chaque $\mathcal{A}/\overline{M^m}$ sera muni de sa structure d'algèbre normée naturelle. La projection canonique p de cet ensemble $\tilde{\mathcal{C}}$ sur $\mathcal{U}$ associe à tout élément de $\mathcal{A}/\overline{M^m}$, le point $M \in \mathcal{U}$.

b) Nous allons munir $\tilde{\mathcal{C}}$ d'une topologie: il existe une application canonique ϑ de $\mathcal{A} \times \mathcal{U}$ sur $\tilde{\mathcal{C}}$ qui à (f, A) fait correspondre l'élément de $\mathcal{A}/\overline{A^m}$, qui est la classe de $f \pmod{\overline{A^m}}$. Nous munirons $\tilde{\mathcal{C}}$ de la topologie la plus fine rendant continue l'application ϑ (B TG Chap. I § 7). Nous appellerons $\mathcal{C}$ l'espace topologique ainsi défini.

(3.2) Pour qu'une suite x_i de points de $\mathcal{C}$ converge vers un point x_0 , il faut et il suffit qu'il existe une suite (f_i, M_i) d'éléments du produit $\mathcal{A} \times \mathcal{U}$, convergeant vers (f_0, M_0) et telle que $\vartheta(f_i, M_i) = x_i$.

Rappelons aussi, que pour qu'un ensemble de $\mathcal{C}$ soit ouvert, il faut et il suffit que son image réciproque par ϑ , soit un ouvert de $\mathcal{A} \times \mathcal{U}$.

(3.3) En particulier, si O est un ouvert de $\mathcal{U}$, l'ensemble $\vartheta(\mathcal{A} \times O)$ est un ouvert de $\mathcal{C}$.

c) La définition précédente de la topologie de $\mathcal{C}$ a l'avantage d'être intrinsèque. Interprétons cette topologie en utilisant les O_j et les S_j . Si M_0 appartient à O_j , on peut supposer que tout les M_i appartiennent à O_j , quitte à en supprimer un nombre fini. Considérons alors les éléments $S_{M_i} f_i$ (développements quasi-tayloriens des f_i par rapport au supplémentaire S_j). D'après le corollaire de la Proposition VII, les $S_{M_i} f_i$ convergent vers $S_{M_0} f_0$. Nous pouvons donc substituer à la définition (3.2) la définition (3.4) en apparence plus fine:

(3.4) Pour qu'une suite x_i converge vers x_0 dans $\mathcal{C}$, il faut et il suffit qu'il existe une suite (f_i, M_i) de $S_j \times O_j$ convergeant vers (f, M) et telle que $\vartheta(f_i, M_i) = x_i$ (sauf peut être pour un nombre fini d'indices non nuls).

Or la restriction de ϑ à $S_j \times O_j$ est biunivoque. L'application ϑ définit donc la topologie de $\vartheta(\mathcal{A} \times O_j) = \vartheta(S_j \times O_j)$ par transport de structure.

Nous avons démontré qu'il existe pour chaque O_j un homéomorphisme de $S_j \times O_j$ sur $p^{-1}(O_j)$, et que cet homéomorphisme respecte la structure vectorielle de chaque fibre (c'est à dire que ϑ applique linéairement $S_j \times \{M\}$ sur $\mathcal{A}/\overline{M^m}$).

d) La fonction $d(M)$ étant continue et majorée par N sur $\mathcal{U}$, on peut établir une partition de $\mathcal{U}$ en un nombre fini d'ouverts sur chacun desquels $d(M)$ reste constante: Nous allons voir qu'au dessus de chacun de ces ouverts, $\mathcal{C}$ est un EFT au sens strict. Donc $\mathcal{C}$ sera un EFT au sens large.

e) D'après la définition (5.2) de Steenrod [1], la topologie de $\mathcal{C}$ est bien une topologie d'espace fibré. ⁽²⁾

f) Soit $M \rightarrow \lambda(M)$ une application de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{C}$. Pour que ce soit une section continue de $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que sa restriction à chaque O_j soit de la forme $M \rightarrow \vartheta(l(M), M)$ où $M \rightarrow l(M)$ est une section

2. On notera que la "définition d'Ehresmann-Feldbau" (5.2) des espaces fibrés coïncide ici avec la définition générale (2.3) de Steenrod en vertu de la remarque (5.5) de [1].

continue du produit $\mathcal{A} \times O_j$ (ou du produit $S_j \times O_j$, ce qui revient au même d'après b)).

Cela permet de vérifier immédiatement que les conditions (1.1) et (1.2) sont satisfaites : par exemple, si λ et μ sont deux sections continues de $\mathcal{C}$, il existe deux applications continues de O_j dans $\mathcal{A}$, $M \mapsto f_M$ (resp. $M \mapsto g_M$) telles que $\vartheta(f_M, M) = \lambda(M)$ pour $M \in O_j$ (resp. $\vartheta(g_M, M) = \mu(M)$).

Comme $\vartheta(f_M \cdot g_M, M) = \lambda \cdot \mu(M)$, on en conclut que le produit de deux sections continues est encore une section continue.

La condition (1.3) est vérifiée par définition de la norme sur $\mathcal{A}/\overline{M^m}$. Quant à la condition (1.4) elle résulte de la Proposition III, si l'on remarque que $\|\lambda(M)\|_M = \text{dist} \cdot [f_M, \overline{M^m}]$.

g) L'existence d'un EFT déterminé intrinsèquement à partir des données étant établie, montrons que $\mathcal{A}$ est bien une algèbre taylorienne relativement à cet EFT.

L'application $f \mapsto \{M \mapsto \vartheta(f, M)\}$ est une représentation continue de $\mathcal{A}$ dans l'algèbre des sections continues de $\mathcal{C}$ munie de la topologie (1.5).

De plus cette représentation est fidèle : Pour qu'un élément de $\mathcal{A}$ soit représenté par la section continue identiquement nulle de $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que f appartienne à tous les idéaux $\overline{M^m}$; f devrait appartenir à l'ultraradical d'ordre $m+1$ qui est réduit à 0, d'après l'axiome AT_4 .

Remarque. Comparons les sections continues de $\mathcal{C}$, au-dessus de O_j , et les sections continues du produit $S_j \times O_j$. S_j est muni d'une norme déterminée (à savoir la norme induite par $\mathcal{A}$). Dans les isomorphismes entre S_j et chaque fibre $\mathcal{A}/\overline{M^m}$ au-dessus de O_j les normes ne sont pas conservées. On ne peut pas dire que $\mathcal{C}$ est fibré en algèbre normée, mais la Prop. V montre qu'il si M décrit un compact de O_j , les normes des $\mathcal{A}/\overline{M^m}$ sont uniformément équivalentes à la norme de S_j .

4. Application aux algèbres de Silov.

M. Silov [1] [2] [3] a inventé une classe d'algèbres normées dont les particularités s'interprètent aisément dans notre point de vue. De plus le schéma de M. Silov, convenablement modifié, permet de construire de nombreux exemples.

Il s'agit, dans le mémoire [1], d'algèbres engendrées par un seul générateur x . On considère l'algèbre des polynômes en x , que l'on munit

de la norme

$$\|P\| = \text{Max} \{ |P(t)| + \alpha(t) \cdot |P'(t)| \}$$

le maximum étant pris sur le segment $[0, 1]$.

$\alpha(t)$ est à priori une fonction numérique positive et bornée: mais M. Silov remarque aussitôt que l'on ne modifie pas l'algèbre en substituant à α sa régularisée semi-continue supérieurement. On peut donc se borner à considérer α semi-continue supérieurement. Cette fonction $\alpha(t)$ n'est autre d'ailleurs que la fonction $t \rightarrow \text{dist}[x, \overline{t^2}]$ qui est intervenue dans notre étude.

L'algèbre de Silov R_α est l'algèbre complétée de l'algèbre normée précédente.

Pour tout point A de $[0, 1]$ (d'abscisse a) la codimension de l'idéal $\overline{A^2}$ est égale à 1, ou 2. Si $\alpha(a) \neq 0$ une base du supplémentaire topologique de $\overline{A^2}$ est constituée par l'unité e , et par l'élément x . Si $\alpha(a) = 0$ on a $d(A) = 1$, et une base du supplémentaire de $\overline{A^2}$ est constituée par e . On vérifie que R_α satisfait à AT_1 , AT_2 et AT_4 .

Par contre une algèbre de Silov ne satisfait pas toujours à AT_3 .

Exemple 6. Considérons l'algèbre de Silov construite à partir de la fonction $\alpha(t)$ égale à $1/q$ si t est égal à la fraction irréductible p/q , et à 0 si t est irrationnel (cf. B TG Chap. IV § 6 Exemple 2). La fonction $d(A)$ correspondante est égale à 1 si α est irrationnel, et à 2 dans le cas contraire. Cette fonction n'appartient qu'à la seconde classe de Baire. Dans ces conditions la construction de l'ultraspectre ne peut pas se faire. Il n'existe pas d'ouvert partout dense sur lequel les idéaux $\overline{A^2}$ varient continûment, car la codimension des idéaux $\overline{A^2}$ est discontinue en chaque point.

Remarquons qu'on aurait pu se borner à définir en chaque point un développement de Taylor de l'élément de l'algèbre, et renoncer à le faire varier continûment. Ou encore, munir le spectre d'une topologie rendant l'application $A \rightarrow T_A f$ continue. Une telle "solution" n'aurait été qu'illusoire. De toute façon notre Théorème II donne des conditions suffisantes pour qu'une telle topologie puisse être localement compacte.

M. Silov découvre dans le dual de R_α certaines fonctionnelles ayant les propriétés algébriques d'une dérivée; mais ces fonctionnelles ne sont pas des dérivées au sens classique. Sans nous être astreint à élucider cette circonstance quelque peu mystérieuse dans le cas général, nous pouvons signaler, que dans de nombreux exemples particuliers d'algèbres de Silov,

que nous avons examinés, les dérivées "généralisées" apparaissent comme des dérivées ordinaires à condition de substituer au spectre l'ultraspectre. Il faut aussi munir cet ultraspectre d'une métrique: cette métrique n'est pas toujours la métrique induite sur chaque ouvert Ω_α de l'ultraspectre; mais elle s'en déduit en effectuant un homéomorphisme convenable.

Le schéma de M. Silov permet de former de nombreux exemples: à titre indicatif, voici une algèbre $\mathcal{A}$ dont le radical est à une dimension et qui n'est pas wedderburnienne (cf. Chap. III). (Un autre exemple, bien différent, a été construit par C. Feldmann [1]).

Exemple 7. Notons d'abord que le radical d'une telle algèbre $\mathcal{A}$, est une algèbre de carré nul engendrée par un unique r . Il existe une forme linéaire continue sur $\mathcal{A}$ telle que pour tout $f \in \mathcal{A}$ $f \cdot r = \lambda(f)r$. En calculant $fg \cdot r$, on trouve aussitôt que λ est un caractère, et que l'annulateur du radical est un idéal maximal A . En passant au quotient $\mathcal{A}/A^2$ comme nous l'avons fait à la fin du Chapitre III, on trouve que pour que $\mathcal{A}$ soit une algèbre wedderburnienne, il faut et il suffit que r ne soit pas adhérent à A^2 .

L'algèbre que nous allons construire, et où cette condition n'est pas satisfaite, est l'algèbre complétée de l'algèbre des polynômes à une variable par rapport à la norme

$$\|P\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \{|P(t)| + |P'(t)| + \sqrt{t}|P''(t)| + |P''(0)|\}$$

(où encore $P = \max \{|P(t)| + |P'(t)| + \alpha(t) \cdot |P''(t)|\}$ où $\alpha(t)$ vaut 1 pour $t=0$ et $\sqrt{t}$ ailleurs). Posons $P_n(t) = (1-t)^n \cdot \frac{t^2}{2}$.

La suite de Cauchy $P_n(t)$ converge vers un élément du radical que nous appellerons r : en effet comme $P''_n(0) = 1$, cette suite ne converge pas vers 0 au sens de la norme. Mais comme cette suite converge uniformément sur $[0, 1]$ vers 0, r appartient au radical.

Par ailleurs, $P_n(t) \in O^2$. Donc $r \in \overline{O^2}$.

Il reste à montrer que le radical est de dimension 1. Si une autre suite de Cauchy $Q_n(t)$ converge vers un autre élément du radical r' , c'est que $Q_n(t)$ converge uniformément vers 0, et que $Q'_n(t)$ converge uniformément vers une limite (qui ne peut qu'être nulle d'après un théorème classique sur la convergence uniforme simultanée d'une suite de fonctions,

et de la suite des dérivées). De plus $Q_n''(t)$ doit converger uniformément sur tout compact $[\varepsilon, 1]$ (où $\varepsilon > 0$). Enfin $Q_n''(0)$ doit tendre vers une limite λ . Si cette limite est nulle, la suite de Cauchy correspondante tend vers 0 en norme. Il suit de là que deux suites de Cauchy qui convergent vers deux éléments distincts du radical, diffèrent nécessairement l'une de l'autre par la constante λ . Ainsi le radical est bien de dimension 1.

Exemple 8. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions continues sur $[0, 1]$ et admettant en chaque point une dérivée à droite, et une dérivée à gauche bornée sur $[0, 1]$. On peut la normer par

$$\|f\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \{ |f(t)| + 1/2 (|f'_d(f)| + |f'_g(t)|) \}$$

Cette algèbre satisfait à AT_2 , AT_3 et AT_4 : la vérification est facile. La fonction $d(A) = 3$. Mais il est facile de voir que les idéaux $\overline{A^2}$ ne possèdent pas la semi-continuité supérieure d'inclusion: il suffit de considérer l'élément $f = |t - a| + t - a$, pour constater qu'il n'appartient pas à l'idéal $\overline{a^2}$, mais qu'il appartient à tous les idéaux $\overline{B^2}$, où l'abscisse b de B est inférieure à a . Nous allons voir que l'algèbre étudiée ne satisfait pas à AT_1 . On peut même affirmer que cette algèbre n'admet pas une suite dénombrable de générateurs: en effet, pour tout générateur éventuel, la dérivée à droite et la dérivée à gauche sont égales sauf peut-être sur un ensemble dénombrable (cf. B Fonct. Var. Réelle Chap. I § 1 Exerc. 4). La dérivée à droite serait égale à la dérivée à gauche pour tous les générateurs sur le complémentaire E d'un ensemble dénombrable. Il en serait de même pour toutes les fonctions appartenant à l'algèbre. Mais pour tout point de $[0, 1]$, il existe des fonctions telles que $|x - a|$ n'ayant pas de dérivée unique en ce point. D'où le contradiction cherchée.

5. Compacité forte du spectre.

L'étude des algèbres de Whitney (cf. Chap. III Prop. I) et des algèbres $Z_\alpha^m(K)$ nous a révélé l'importance des propriétés de compacité de certains ensembles de distributions à support ponctuel.

Nous allons étudier les conséquences de l'axiome suivant:

(CF) Sur le spectre de l'algèbre $\mathcal{A}$, les topologies faibles et fortes du dual coïncident.

En d'autres termes, le spectre est un compact fort.

Proposition VIII. Si une algèbre de Banach satisfait à CF) son spectre est métrisable, et les transformées de Gelfand des éléments de $\mathcal{A}$ sont des fonctions uniformément lipschitziennes pour une métrique compatible avec la topologie du spectre.

On peut définir sur le spectre une distance, induite par la norme du dual.

$$\|AB\| = \sup |f(A) - f(B)| \quad \text{pour} \quad \|f\| \leq 1.$$

Le diamètre du spectre (comme celui de la boule unité du dual) est majoré par 2.

$$(5.1) \quad \text{Pour tout } f \in \mathcal{A}, \quad |f(A) - f(B)| \leq \|f\| \cdot \|AB\|.$$

Définition. Nous dirons que deux métriques définies sur un même espace métrisable sont L -équivalentes, s'il existe deux constantes K et K' telles que

$$K \cdot \|MN\|_1 \leq \|MN\|_2 \leq K' \cdot \|MN\|_1$$

(où $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ désignent les deux distances). En d'autres termes les applications identiques sont des applications lipschitziennes.

Comme les différentes normes que l'on peut définir sur un espace de Banach sont L -équivalentes entre elles, la structure métrique du spectre fort n'est définie qu'à une L -équivalence près.

Si $\mathcal{A}$ est engendrée par un nombre fini de générateurs, le spectre est homéomorphe à un compact d'un espace R^n , et est également muni, de ce fait, d'une structure métrique (induite par la métrique euclidienne $\|\cdot\|_E$); cette métrique n'est pas en général L -équivalente à la métrique forte. Le cas des algèbres $Z_\alpha^0(K)$ le prouve abondamment: une métrique L -équivalente à la métrique forte y est $\alpha(\|\cdot\|_E)$.⁽³⁾

3. Alors se pose un problème de "Géométrie des distances" (qui ne semble pas avoir été abordé, (à notre connaissance) (cf. Menger [1]). Un espace métrique homéomorphe à un compact de R^n étant donné, est-il possible de choisir cet homéomorphisme, de façon qu'il soit uniformément lipschitzien, ainsi que l'homéomorphisme réciproque, pour la métrique euclidienne et la métrique donnée. Les travaux de Menger, Wilson, Blumenthal, et de leurs élèves portent sur des isométries strictes, et non sur des isométries définies à une L -équivalence près. On trouvera à la fin du Chapitre IV un exemple d'une telle L -isométrie d'un segment muni d'une métrique non L -équivalente à la structure euclidienne de R^1 , sur la courbe de von Koch munie de sa structure euclidienne.

A défaut d'une L -isométrie entre le spectre fort et le spectre muni de la métrique euclidienne défini par la Proposition I, on peut remarquer que

$$|x_i(A) - x_i(B)| \leq \|x_i\| \cdot \|AB\|$$

pour chacun des générateurs x_i . Il s'ensuit que :

$$\|AB\|_E = \sqrt{\sum |x_i(A) - x_i(B)|^2} \leq \|AB\| \cdot \sqrt{\sum x_i^2}.$$

Il existe donc une constante K telle que

$$(5.2) \quad \|AB\|_E \leq K \cdot \|AB\|.$$

Remarque. On peut définir aussi une structure métrique sur l'ultraspectre, qui est la somme topologique d'une famille Ω_α réalisant une partition du spectre. Sur un même Ω_α , on transportera la métrique du spectre fort. Si M et N appartiennent à des Ω_α différents, on posera $\|MN\| = 2$.

Théorème III. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre taylorienne (pour $m=1$), satisfaisant à CF). Pour tout $f \in \mathcal{A}$ et tout compact F de l'ultraspectre, tel qu'en chacun de ses points M , l'idéal $\overline{M}^2$ soit supplémentaire d'un même sous-espace $S \in \mathcal{P}$, on peut faire correspondre un module de continuité α_f tel que

$$|f(M) - S_A f(M)| \leq \|AM\| \cdot \alpha_f(\|AM\|).$$

Si, de plus, la métrique forte et la métrique euclidienne du spectre sont L -équivalentes, on peut identifier chaque élément de $\mathcal{A}$ à un champ- W -taylorien d'ordre 1 défini sur l'ultraspectre.

a) Étudions le rapport

$$\frac{|f(M) - S_A f(M)|}{\|AM\|} = \frac{R_A f(M)}{\|AM\|}.$$

Ce quotient reste borné lorsque A et M décrivent F : En effet d'après la Proposition VII, il existe une constante K , telle que $\|R_A f\| \leq K \cdot \|f\|$ lorsque A décrit F . D'après (5.1)

$$|R_A f(M)| \leq \|AM\| \cdot \|R_A f\| \leq K \cdot \|AM\| \cdot \|f\|.$$

Le quotient étudié est donc bien borné.

b) Il reste à montrer que ce quotient tend vers 0, lorsque A et M tendent indépendamment vers un point B de F . (Cela prouvera que le quotient étudié est une fonction continue sur $F \times F$, nulle sur la diagonale, et l'on en déduit l'existence de α_f en utilisant le Lemme I du Chapitre I).

c) Il résulte de a) que la fonction $f \rightarrow \limsup_{A \text{ et } M \rightarrow B} \frac{|R_A f(M)|}{\|AM\|}$ est une semi-norme bornée, donc continue, sur $\mathcal{A}$.

d) Cette semi-norme s'annule sur le sous-espace S . Car pour $f \in S$ $R_A f = 0$ pour $A \in F$.

Montrons que cette semi-norme s'annule aussi sur $\overline{B^2}$ (c'est à dire finalement sur $\mathcal{A}$. (Car $\mathcal{A} = S + \overline{B^2}$).

Il suffit pour le voir de montrer que la dite semi-norme s'annule sur B^2 et finalement on peut se ramener au cas où $f = g_1 \cdot g_2$ où g_1 et $g_2 \in B$.

e) Calculons $R_A f$: partons de :

$$g_1 = g_1(A) \cdot e + (S_A g_1 - g_1(A)) \cdot e + R_A g_1$$

et d'un développement analogue pour g_2 .

On obtient $R_A f$ en multipliant les développements de g_1 et g_2 , et en supprimant tous les termes constants, et du premier degré.

Il vient

$$\begin{aligned} R_A f &= g_1 \cdot R_A g_2 + g_2 \cdot R_A g_1 + \{S_A g_1 - g_1(A) \cdot e\} \cdot \{S_A g_2 - g_2(A) \cdot e\} \\ R_A f(M) &= g_1(M) \cdot R_A g_2(M) + g_2(M) \cdot R_A g_1(M) \\ &\quad + \{S_A g_1(M) - g_1(A)\} \cdot \{S_A g_2(M) - g_2(A)\}. \end{aligned}$$

En notant que $\|R_A g_i\| \leq K \cdot \|g_i\|$, que $\|S_A g_i\| \leq K \cdot \|g_i\|$ et que $S_A g_i(A) = g_i(A)$ on trouve que

$$\frac{|R_A f(M)|}{\|AM\|} \leq |g_1(M)| \cdot K \cdot \|g_2\| + |g_2(M)| \cdot K \cdot \|g_1\| + K^2 \cdot \|AM\| \cdot \|g_1\| \cdot \|g_2\|.$$

Comme $g_i(M)$ et $\|AM\|$ tendent vers 0 lorsque A et M tendent vers B , le quotient étudié tend bien vers 0. C. Q. F. D.

La seconde assertion, relative au cas où la métrique forte est L -équivalente à la structure euclidienne, est évidente: il suffit de poser

$$D_A^1 f = S_A^1 f - f(A) \cdot e.$$

$D_A^1 f$ varie continûment sur l'ultraspectre (cf. Prop. VII).

Remarque. Il est naturel de se demander, si dans le cas où $m \neq 1$, l'axiome CF) ne permettrait pas d'affirmer que

$$|R_A f(M)| \leq \|AM\|^m \cdot \alpha_f(\|AM\|).$$

Il n'en est rien: l'Exemple 2 (2.4) constitue un contre-exemple. De plus, l'axiome CF) qui s'exprime en termes de transformée de Gelfand ne peut rien impliquer en ce qui concerne le radical. On peut par exemple former, sur le modèle de l'Exemple 3, une algèbre dont les éléments ont pour

transformée de Gelfand des fonctions m -fois continûment dérivables (par conséquent CF) sera satisfait), et dont le radical ne comprend que des éléments descriptibles en termes de fonctions continues.

BIBLIOGRAPHIE

Notre ouvrage de référence principal est le traité de N. Bourbaki (Hermann et Cie, Paris — Act. Scient. et Ind.)

Nous utiliserons les abréviations suivantes :

- | | |
|----------------|--|
| B Int. | signifie : Bourbaki, Intégration. |
| B TG | signifie : Bourbaki, Topologie Générale |
| B EVT | signifie : Bourbaki, Espaces Vectoriels Topologiques |
| B Alg. | signifie : Bourbaki, Algèbre |
| B Fonct. Var R | signifie : Bourbaki, Fonctions d'une variable réelle |

Pour de nombreux résultats cités dans cet ouvrage, ne fût-ce qu'en exercice, nous ne nous sommes pas astreints à indiquer les véritables sources.

*

R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues (Gauthier-Villars 1930).

Besicovitch and Ursel, On dimensional numbers of some continuous curves (*Journal. London Math. Soc.* 1937).

G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe (Vuibert 1932).

H. Cartan, Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives (Act. Sc. et Ind.—Hermann 1940).

C. Chevalley, Théorie des groupes de Lie, Tome II (Publ. de L'Université de Nancago—Hermann 1951).

G. Choquet, (1) Application des propriétés descriptives de la fonction contingente (*Journal de Math. Pures et Appl.* t. 26, 1947).

G. Choquet, (2) L'isométrie des ensembles dans ses rapports avec la théorie du contact et la théorie de la mesure (*Mathematica*, Volumul XX 1944).

G. Choquet, (3) Convergence (*Annales de l'Institut Fourier* — Grenoble 1948).

Corominas, Contribution à la théorie des dérivations d'ordre supérieur (*Bulletin de la Soc. Math. de France* t. 81, 1953).

Favard, Sur l'interpolation (*J. de math. pures et appl.* t. 19, 1940).

Ch. Feldmann, The Wedderburn principal theorem in Banach algebras (*Proc. Amer. Math. Soc.* t. 2, 1951).

Gelfand, Normierte Ringe (*Math. Sbornik* 9—51, 1941).

G. Glaeser, (1) Sur le théorème du prolongement de Whitney, *C. R. Acad. Sc.*, t. 245 (1957) p. 617—619.

G. Glaeser, (2) Propriétés m -fois continûment dérivables des ensembles fermés, *C. R. Acad. Sc.* t. 245 (1957) p. 780—782.

G. Glaeser, (3) Intégration d'une forme différentielle le long de certaines courbes non rectifiables. (En préparation).

R. Godement, Sur la théorie des représentations unitaires (*Annals of Math.* Vol. 53—1, 1951).

A. Grothendieck, Espaces vectoriels topologiques (Cours ronéotypé Sao Paulo, 1954).

Hestenes, Extension of the range of differentiable functions (*Duke math. Journal*, 1941).

von Koch, Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes (*Acta Math.*, 1906).

Loomis, Abstract harmonic analysis (Van Nostrand — New-York, 1953).

Mackey, Commutative Banach algebras (Ronéotypé—Harvard University 52).

Mac-Shane, Extension of the range of functions (*Bull. of the Amer. Math. Soc.* t. 40, 1934).

K. Menger, Géométrie générale (*Memorial des Sc. Math.* t. 124 Gauthier-Villars, 1954).

Michael, Locally multiplicatively convex topological algebras (*Memoirs of the Amer. Math. Soc.* vol. 11).

Popoviciu, Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles (*Mathematica*, Volumul VIII, 1934).

Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées (*Publ. de l'Institut Math. de Strasbourg*, Act. Sc. et Ind., Hermann, 1952).

R. Salem, On some singular monotonic functions which are strictly increasing (*Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 53, 1943).

Samuel, Algèbres locales. *Mémorial des Sc. Math.* n° 123.

L. Schwartz, Théorie des distributions (Hermann 1950).

L. Schwartz, Analyse et synthèse harmonique dans les espaces de distributions (*Can. Journ. of Math.* vol. 3 n° 4, 1951).

M. Silov, (1) Description d'une classe d'algèbres normées (*Math. Sbornik* t. 26 (68) (1—) (En russe).

M. Silov, (2) Théorème généralisé sur la dérivation des limites uniformes de suites de fonctions (*Math. Sbornik* t. 26 (68), 1950 (en russe).

M. Silov, (3) Sur les sommes continues d'algèbres de dimension finie (*Math. Sbornik* t. 27 (69), 1950) (en russe).

M. Sion, On the existence of functions having given partial derivatives on a curve (*Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 77—2, 1954).

Steenrod, Topology of fibre bundles (Princeton University Press, 1951).

De la Vallée-Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle (Gauthier—Villars 1919).

A. Weil, Théorie des points proches sur les variétés différentiables (Colloque international de géométrie différentielle, Strasbourg 1953, Ed. du C.N.R.S.).

H. Whitney, (1) Analytic extension of differentiable functions defined on closed sets (*Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 36—1, 1934).

H. Whitney, (2) On extension of differentiable functions (*Bull. Amer. Math. Soc.* vol. 50—2, 1944).

transformée de Gelfand des fonctions m -fois continûment dérivables (par conséquent CF) sera satisfait), et dont le radical ne comprend que des éléments descriptibles en termes de fonctions continues.

BIBLIOGRAPHIE

Notre ouvrage de référence principal est le traité de N. Bourbaki (Hermann et Cie, Paris — Act. Scient. et Ind.)

Nous utiliserons les abréviations suivantes :

- B Int. signifie : Bourbaki, Intégration.
- B TG signifie : Bourbaki, Topologie Générale
- B EVT signifie : Bourbaki, Espaces Vectoriels Topologiques
- B Alg. signifie : Bourbaki, Algèbre
- B Fonct. Var R signifie : Bourbaki, Fonctions d'une variable réelle

Pour de nombreux résultats cités dans cet ouvrage, ne fût-ce qu'en exercice, nous ne nous sommes pas astreints à indiquer les véritables sources.

*

R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues (Gauthier-Villars 1930).

Besicovitch and Ursel, On dimensional numbers of some continuous curves (*Journal. London Math. Soc.* 1937).

G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe (Vuibert 1932).

H. Cartan, Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives (Act. Sc. et Ind.—Hermann 1940).

C. Chevalley, Théorie des groupes de Lie, Tome II (Publ. de L'Université de Nancago—Hermann 1951).

G. Choquet, (1) Application des propriétés descriptives de la fonction contingente (*Journal de Math. Pures et Appl.* t. 26, 1947).

G. Choquet, (2) L'isométrie des ensembles dans ses rapports avec la théorie du contact et la théorie de la mesure (*Mathematica*, Volumul XX 1944).

G. Choquet, (3) Convergence (*Annales de l'Institut Fourier* — Grenoble 1948).

Corominas, Contribution à la théorie des dérivations d'ordre supérieur (*Bulletin de la Soc. Math. de France* t. 81, 1953).

Favard, Sur l'interpolation (*J. de math. pures et appl.* t. 19, 1940).

Ch. Feldmann, The Wedderburn principal theorem in Banach algebras (*Proc. Amer. Math. Soc.* t. 2, 1951).

Gelfand, Normierte Ringe (*Math. Sbornik* 9—51, 1941).

G. Glaeser, (1) Sur le théorème du prolongement de Whitney, *C. R. Acad. Sc.*, t. 245 (1957) p. 617—619.

G. Glaeser, (2) Propriétés m -fois continûment dérivables des ensembles fermés, *C. R. Acad. Sc.* t. 245 (1957) p. 780—782.

G. Glaeser, (3) Intégration d'une forme différentielle le long de certaines courbes non rectifiables. (En préparation).

R. Godement, Sur la théorie des représentations unitaires (*Annals of Math.* Vol. 53—1, 1951).

A. Grothendieck, Espaces vectoriels topologiques (Cours ronéotypé Sao. Paulo, 1954).

Hestenes, Extension of the range of differentiable functions (*Duke math. Journal*, 1941).

von Koch, Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes (*Acta Math.*, 1906).

Loomis, Abstract harmonic analysis (Van Nostrand — New-York, 1953).

Mackey, Commutative Banach algebras (Ronéotypé—Harvard University 52).

Mac-Shane, Extension of the range of functions (*Bull. of the Amer. Math. Soc.* t. 40, 1934).

K. Menger, Géométrie générale (*Memorial des Sc. Math.* t. 124 Gauthier-Villars, 1954).

Michael, Locally multiplicatively convex topological algebras (*Memoirs of the Amer. Math. Soc.* vol. 11).

Popoviciu, Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles (*Mathematica*, Volumul VIII, 1934).

Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées (*Publ. de l'Institut Math. de Strasbourg*, Act. Sc. et Ind., Hermann, 1952).

R. Salem, On some singular monotonic functions which are strictly increasing (*Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 53, 1943).

Samuel, Algèbres locales. *Mémoires des Sc. Math.* n° 123.

L. Schwartz, Théorie des distributions (Hermann 1950).

L. Schwartz, Analyse et synthèse harmonique dans les espaces de distributions (*Can. Journ. of Math.* vol. 3 n° 4, 1951).

M. Silov, (1) Description d'une classe d'algèbres normées (*Math. Sbornik* t. 26 (68) (1—) (En russe).

M. Silov, (2) Théorème généralisé sur la dérivation des limites uniformes de suites de fonctions (*Math. Sbornik* t. 26 (68), 1950 (en russe).

M. Silov, (3) Sur les sommes continues d'algèbres de dimension finie (*Math. Sbornik* t. 27 (69), 1950) (en russe).

M. Sion, On the existence of functions having given partial derivatives on a curve (*Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 77—2, 1954).

Steenrod, Topology of fibre bundles (Princeton University Press, 1951).

De la Vallée-Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle (Gauthier—Villars 1919).

A. Weil, Théorie des points proches sur les variétés différentiables (Colloque international de géométrie différentielle, Strasbourg 1953, Ed. du C.N.R.S.).

H. Whitney, (1) Analytic extension of differentiable functions defined on closed sets (*Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 36—1, 1934).

H. Whitney, (2) On extension of differentiable functions (*Bull. Amer. Math. Soc.* vol. 50—2, 1944).

H. Whitney, (3) Derivatives, difference quotient and Taylor formula (*Bull. Amer. Math. Soc.* Vol. 40, 1934).

H. Whitney, (4) Functions differentiable on the boundary of regions (*Annals of Math.* Vol. 35, 1934).

H. Whitney, (5) A function not constant on a connected set of critical points (*Duke Math. J.* Vol. 1, 1935).

H. Whitney, (6) On ideals of differentiable functions (*Amer. Journ. of Math.* t. 70, 1948).

Z y g m u n d, Trigonometrical Series (Warsawa—Lwow, 1935).

(Reçu le 2 juillet 1957)

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

THÉORIE DES SPINEURS

Vu et approuvé :

Nancy, le 13 Mai 1957

Le Doyen de la Faculté des Sciences :

URION.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Nancy,

MAYER.

